

ISSN 0130-2221

2019 · №10

ОКТАБРЬ

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



КУБИКОВ

МАЛО

НЕ

БЫВАЕТ



В большинстве головоломок Фолькера Латуссека (Volker Latussek) всего несколько простых деталей, которые к тому же обычно очень похожи друг на друга. Эта головоломка – не исключение: в ней четыре одинаковых по форме детали, отличающихся лишь раскраской. На фотографии видно, что каждая из них – это три склеенных кубика $2 \times 2 \times 2$ и что у некоторых кубиков половинки разных цветов (светлые и темные, темных половинок всего 8).

Задание звучит так: нужно расположить эти детали на столе, чтобы вся конструкция была устойчива и при этом получилось четыре темных кубика.

Желаем успеха!

Е.Епифанов

В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук
Математический институт
им. В.А.Стеклова РАН
Физический институт
им. П.Н.Лебедева РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

А.А.Гайфуллин

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,
М.Н.Бондаров, Ю.М.Брук,
А.А.Варламов, С.Д.Варламов,
А.П.Веселов, А.Н.Виленкин, В.И.Голубев,
Н.П.Долбиллин, С.А.Дориченко,
В.Н.Дубровский, А.А.Заславский,
А.Я.Канель-Белов, П.А.Кожевников
(заместитель главного редактора),
С.П.Коновалов, К.П.Кохась, А.А.Леонович,
Ю.П.Лысов, А.Б.Минеев, В.В.Произволов,
В.Ю.Протасов, А.М.Райгородский,
Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,
А.В.Устинов, А.И.Черноуцан
(заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,
А.А.Боровой, В.В.Козлов,
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин,
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.КикоинПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА**А.Н.Колмогоров**

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

- 2 О квадратичных вычетах. *Е.Смирнов*
11 Прозрачное и непрозрачное (окончание).
Л.Ашкинази

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 17 Задачи М2578–М2581, Ф2585–Ф2588
19 Решения задач М2566–М2569, Ф2573–Ф2576

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 24 Задачи 5–8

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 25 Задачи
26 Замкнутые самопересекающиеся ломаные.
А.Блинков, А.Грибалко

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 29 Льем воду... *С.Дворянинов*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Физика+техника (оружие)

ОЛИМПИАДЫ

- 31 LX Международная математическая
олимпиада
35 L Международная физическая олимпиада

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 44 Санкт-Петербургский политехнический
университет Петра Великого
51 Ответы, указания, решения
Вниманию наших читателей (30)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к Калейдоскопу «Кванта»*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

О квадратичных вычетах

Е. СМЕРНОВ

МНОГИЕ ЗНАЮТ, ЧТО С ОСТАТКАМИ при делении на данное натуральное число m – также говорят «с остатками по модулю m » и пишут « $\text{mod } m$ » – можно делать почти то же самое, что с целыми числами: остатки можно складывать, вычитать, умножать... А если m равно простому числу p , то остатки можно даже и делить! Так, каждое линейное уравнение $ax = b \pmod{p}$ имеет единственное решение, если a – ненулевой остаток.

А как обстоит дело с квадратными уравнениями? Как выяснить, есть ли решения у уравнения $ax^2 = b$ по модулю простого числа p ? Этому и посвящена настоящая статья. Главным утверждением, которое мы при этом докажем, будет знаменитый *квадратичный закон взаимности Гаусса* – теорема, устанавливающая связь между разрешимостью уравнений $x^2 = p \pmod{q}$ и $x^2 = q \pmod{p}$ для двух разных простых чисел p и q . С его помощью мы научимся выяснять, разрешимо ли квадратное уравнение по данному простому модулю.

Арифметика остатков

В этом разделе мы кратко напомним некоторые факты об арифметике вычетов по простому модулю. Читателю, который не знаком с арифметикой остатков, рекомендуем сначала прочесть, например, статьи: *Н. Виленкин*. Сравнения и классы вычетов («Квант» №10 за 1978 г.) или *А. Егоров, А. Котова*. Необыкновенные арифметики («Квант» №3–4 за 1993 г.).

Чтобы сложить два остатка a и b по модулю m , нужно сложить их как целые числа и взять у результата остаток по модулю m . Так же определяются и разность, и произведение остатков. Определенные таким образом операции удовлетворяют обычным законам арифметичес-

ких действий: для них верны переместительный, сочетательный и распределительный законы, существуют ноль и единица. (Алгебраисты сказали бы, что они образуют *кольцо*.) Подробности читатель может восстановить сам или посмотреть в одной из упомянутых выше статей.

Для примера составим таблицы умножения остатков по модулю 6 и 7. При этом мы опускаем строчку и столбец, отвечающие

6	1	2	3	4	5	
1	1	2	3	4	5	
2	2	4	0	2	4	
3	3	0	3	0	3	
4	4	2	0	4	2	
5	5	4	3	2	1	
7	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

умножению на ноль: они состоят из одних нулей.

Сопоставив эти таблицы, можно сделать некоторые наблюдения. Так, например, в первой из таблиц (по модулю 6) встречаются нули; иначе говоря, существуют такие два ненулевых остатка, произведение которых равно нулю. Такие остатки называются *делителями нуля*. Скажем, по модулю 6 делителями нуля будут числа 2, 3 и 4.

Ясно, что по составному модулю делители нуля всегда будут: так, если m составное, то существуют такие k и l , отличные от единицы, для которых $m = kl$. Поэтому числа k и l соответствуют ненулевым ос-

таткам, произведение которых равно нулю по модулю m .

Чуть менее тривиален обратный вопрос: верно ли, что в арифметике остатков по простому модулю делителей нуля нет? (Например, по модулю 7 их нет, что подтверждается второй таблицей.) Оказывается, что это тоже верно.

Докажем это. Рассмотрим арифметику остатков по модулю p и предположим противное: пусть нашлись такие k и l , которые дают при делении на p ненулевые остатки – но при этом их произведение делится на p нацело, т.е. $kl = pm$. Однако если произведение двух чисел делится на простое число p , то на p делится хотя бы одно из этих чисел. Противоречие: ни k , ни l не делятся на p .

Мы получили следующее утверждение.

Предложение 1. *В арифметике остатков по модулю m нет делителей нуля тогда и только тогда, когда m является простым числом.*

Далее нас будет интересовать в основном тот случай, когда m простое; в этом случае будем обозначать его буквой p , а соответствующее множество остатков (с операциями сложения и умножения) будет обозначаться через $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.¹

Можно сделать еще одно наблюдение: в каждой из строк второй таблицы записаны в каком-то порядке все ненулевые остатки по модулю 7; все числа от 1 до 6 встречаются в ней по одному разу, и ни одно не повторяется. Оказывается, что так обстоит дело и для произвольного простого модуля.

Предложение 2. *Пусть p простое, $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ – некоторый ненулевой остаток. Тогда среди остатков $0, a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ нет повторяющихся.*

Доказательство. Пусть два остатка $k, m \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ таковы, что $ak = am$. Тогда $a(k-m)$ равно нулю. Но мы только что

доказали, что в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ произведение двух ненулевых остатков отлично от нуля. Поскольку по условию $a \neq 0$, то это значит, что $k-m=0$, т.е. $k=m$, что и требовалось.

Из этого несложного предложения вытекает несколько интересных следствий.

Следствие 1. *В $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ линейное уравнение $ax = 0$ при $a \neq 0$ имеет единственное решение.*

Доказательство. Действительно, переберем все возможные значения x , т.е. рассмотрим все остатки вида $0, a, 2a, \dots$. Согласно предложению 2, среди них будет остаток, равный b , причем ровно один.

Частным случаем этого следствия является следующая утверждение.

Следствие 2. *Для каждого ненулевого остатка $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ существует и единственный обратный, т.е. такой остаток x , что $ax = 1$.*

Этот остаток обычно обозначается a^{-1} .

Пример 1. Например, в $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ обратным к остатку 3 будет остаток 5: действительно, $3 \cdot 5 = 15$, что дает остаток 1 по модулю 7.

Замечание. Отметим, что в арифметике по составному модулю ни то, ни другое следствие не будет выполняться. Так, например, по модулю 6 уравнение $2x = 4$ будет иметь два решения: 2 и 5, а ни один из остатков 2, 3 и 4 не будет обратим.

Упражнение 1. Выясните, какие остатки будут обратимы в арифметике остатков по произвольному составному модулю m .

А что будет, если перемножить все остатки $a, 2a, \dots, (p-1)a$? С одной стороны, $a^{p-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1) = a^{p-1} (p-1)!$. С другой стороны, согласно предложению 2, эти остатки – это те же $1, 2, \dots, p-1$, только записанные в другом порядке. Значит, их произведение равняется $(p-1)!$. Тем самым мы получаем равенство

$$a^{p-1} (p-1)! = (p-1)!.$$

Поделив это равенство на $(p-1)!$ (контрольный вопрос: почему это можно сделать?), получаем следующую теорему.

Теорема 1 (малая теорема Ферма). *Пусть p простое. Тогда в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ для*

¹ Смысл этого обозначения в том, что мы рассматриваем целые числа, множество которых традиционно обозначается через \mathbb{Z} , с точностью до прибавления чисел, делящихся на p , множество которых естественно обозначить через $p\mathbb{Z}$.

любого ненулевого a верно равенство

$$a^{p-1} = 1.$$

Упражнение 2. Покажите, что остатки, обратные к самим себе, т.е. такие, для которых $a = a^{-1}$, это в точности 1 и $p - 1$. Выведите отсюда теорему Вильсона:

$$(p - 1)! = -1.$$

Квадратичные вычеты

Первая в истории человечества книга по алгебре, «Китаб аль-джебр ва-ль-мукабала», была написана средневековым ученым Мухаммадом ибн Мусой аль-Хорезми около 830 года н.э. Аль-Хорезми был уроженцем Хивы – сейчас это территория Узбекистана. В этой книге, в числе прочего, был изложен метод решения квадратного уравнения.

Основной метод решения квадратного уравнения (с вещественными коэффициентами) состоит в выделении полного квадрата, что сводит его к уравнению вида $x^2 = a$. Такое уравнение легко решить: если $a > 0$, то его корни равны $\pm\sqrt{a}$; если $a = 0$, то единственный корень равен нулю; если же $a < 0$, то корней у такого уравнения нет.

Квадратичные вычеты и невычеты.

Наша ближайшая задача будет состоять в том, чтобы научиться искать число решений уравнения $x^2 = a$, где $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ – остаток по некоторому фиксированному простому модулю p . Будем считать, что $p > 2$, т.е. p – нечетное простое число.

Заметим, что если уравнение $x^2 = a$ при $a \neq 0$ имеет корень, то этих корней обязательно будет ровно два: a именно, если b – корень этого уравнения, то и $-b$ – тоже его корень. При этом, поскольку p нечетно, $b \neq -b$.

Поэтому получается, что $x^2 - a = (x - b)(x + b)$. Отсюда следует, что других корней у уравнения $x^2 = a$ нет: если c – корень уравнения, то $(c - b)(c + b) = 0$, откуда $c = b$ или $c = -b$ (обратите внимание, что здесь мы опять пользуемся отсутствием делителей нуля в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$!).

Определение 1. Пусть $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Будем называть a квадратичным выче-

том, если уравнение $x^2 = a$ разрешимо, и квадратичным невычетом в противном случае.

Пример 2. По модулю 7 квадратичными вычетами будут числа 1, 2 и 4: это в точности те числа, которые стоят на диагонали в таблице умножения остатков по модулю 7. Отметим, что каждое из них встречается там ровно два раза.

При этом число 0 мы не будем относить ни к квадратичным вычетам, ни к невычетам (так же, как вещественное число 0 не является ни положительным, ни отрицательным).

Предложение 3. Количество как квадратичных вычетов, так и квадратичных невычетов в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ равно $\frac{p-1}{2}$.

Доказательство. Каждому квадратичному вычету a соответствуют два решения $\pm b$ уравнения $x^2 = a$. Также ясно, что каждый ненулевой остаток из $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ является решением ровно одного квадратного уравнения такого вида. Поэтому получается, что квадратичных вычетов оказывается вдвое меньше, чем ненулевых элемен-

тов из $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, т.е. $\frac{p-1}{2}$. Все остальные элементы $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ тогда будут квадратичными невычетами, и их $(p-1) - \frac{p-1}{2}$, а значит, столько же.

Упражнения

3. Для всех нечетных простых чисел $p < 20$ перечислите все квадратичные вычеты и невычеты по модулю p .

4. Докажите, что при нечетном простом p квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $a \neq 0$,

• имеет два решения, равные $x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{D}}{2a}$,

если его дискриминант $D = b^2 - 4ac$ является квадратичным вычетом;

• имеет единственное решение, если $D = 0$;

• неразрешимо над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, если D – квадратичный невычет.

Указание. С помощью выделения полного квадрата сведите данное уравнение к виду $x^2 = D$.

Символ Лежандра и его мультипликативность. Ясно, что произведение двух

квадратичных вычетов снова будет квадратичным вычетом. А что будет, если перемножить два квадратичных невычета? А вычет и невычет? Оказывается, верна следующая теорема.

Теорема 2. а) Произведение двух квадратичных вычетов – квадратичный вычет;

б) произведение квадратичного вычета и квадратичного невычета – квадратичный невычет;

в) произведение двух квадратичных невычетов – квадратичный вычет.

Доказательство. Пункт а) очевиден: если a и b квадратичные вычеты, т.е. существуют такие x и y , для которых $x^2 = a$ и $y^2 = b$, то ab тоже будет квадратичным вычетом, поскольку $(xy)^2 = ab$.

Докажем пункт б). Пусть a – квадратичный вычет, b – квадратичный невычет. Предположим противное: что ab – квадратичный вычет. Поскольку a – квадратичный вычет, найдется такое x , что $x^2 = a$. В таком случае и элемент a^{-1} будет квадратичным вычетом, так как $a^{-1} = (x^{-1})^2$. Соответственно, в силу пункта а) элемент b как произведение квадратичных вычетов ab и a^{-1} будет квадратичным вычетом – противоречие.

Пункт в) аналогичными формальными манипуляциями доказать уже не удастся. Однако его можно вывести из пункта б) при помощи подсчета числа элементов. А именно, пусть a – фиксированный квадратичный невычет. Рассмотрим все элементы вида $a, 2a, \dots, (p-1)a$. Как обсуждалось ранее, в этой последовательности все элементы $1, 2, \dots, (p-1)$ встречаются, причем ровно по одному разу – поэтому среди них $\frac{p-1}{2}$ квадратичных вычетов и $\frac{p-1}{2}$ квадратичных невычетов. Однако в силу пункта б) при умножении a на квадратичный вычет получается квадратичный невычет, и таких элементов будет $\frac{p-1}{2}$, т.е. все квадратичные невычеты будут получаться таким образом. Значит, при умножении a на все остальные элементы (т.е.

невычеты) должны получаться квадратичные вычеты, что и требовалось.

Тем самым квадратичные вычеты и невычеты ведут себя при умножении примерно так же, как положительные и отрицательные числа. Это мотивирует следующее определение.

Определение 2. Пусть $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $a \neq 0$.

Символ Лежандра $\left(\frac{a}{p}\right)$ определяется следующим образом:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & a - \text{квадратичный вычет;} \\ -1, & a - \text{квадратичный невычет;} \\ 0, & a = 0. \end{cases}$$

Таким образом, символ Лежандра можно считать аналогом функции знака числа. Тогда предыдущая теорема принимает следующий компактный вид.

Теорема 3. Символ Лежандра мультипликативен:

$$\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right).$$

Далее мы приведем другое доказательство этой теоремы, которое будет следовать из еще одного полезного утверждения, позволяющего вычислить символ Лежандра, – критерия Эйлера.

Критерий Эйлера. Прежде чем читать дальше, рекомендуем читателю выполнить следующее упражнение.

Упражнение 5. Возьмите какое-нибудь нечетное простое число, меньшее 20, и возведите каждый из ненулевых остатков $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ в степень $\frac{p-1}{2}$. Убедитесь, что у вас всегда будет получаться ± 1 . А когда получается 1, а когда -1 ?

Тем самым вы «экспериментально» проверите утверждение следующей теоремы.

Теорема 4 (критерий Эйлера). Пусть $p > 2$ – простое число, $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Тогда

$$a^{\frac{p-1}{2}} = \left(\frac{a}{p}\right).$$

Доказательство. При $a = 0$ утверждение теоремы очевидно. Дальше будем считать, что a отлично от 0.

Во-первых, сначала убедимся, что при

любом $a \neq 0$ будет иметь место равенство $\frac{p-1}{a^2} = \pm 1$. Действительно, $\left(\frac{p-1}{a^2}\right)^2 = a^{p-1} = 1$ по малой теореме Ферма. Но остаток, квадрат которого равен 1, может равняться только 1 или -1 .

Далее, ясно, что если $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$, то $\frac{p-1}{a^2} = 1$. Действительно, если a – квадратичный вычет, то существует такое b , что $b^2 = a$. Тогда $\frac{p-1}{a^2} = \left(\frac{p-1}{b^2}\right)^2 = b^{p-1} = 1$ опять-таки в силу малой теоремы Ферма.

Осталось доказать, что если a – квадратичный невычет, то $\frac{p-1}{a^2} = -1$. Для этого рассмотрим уравнение $x^2 - 1 = 0$. Это полиномиальное уравнение степени $\frac{p-1}{2}$, следовательно, по теореме Безу (которая верна и для многочленов с коэффициентами из $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) у него не может быть более $\frac{p-1}{2}$ корней. Но такое количество корней нам уже известно: это все квадратичные вычеты. Тем самым получается, что квадратичные невычеты не являются корнями этого уравнения, т.е. для них $\frac{p-1}{a^2} \neq 1$. Значит, для них $\frac{p-1}{a^2} = -1$. Теорема доказана.

Для полноты изложения докажем, что многочлен с коэффициентами из $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ степени d имеет не более d корней. Это доказывается точно так же, как и для многочленов с вещественными коэффициентами. Докажем это индукцией по d . База при $d = 1$ очевидна: это следствие 1. Для доказательства индуктивного перехода отметим, что если $p(x)$ – многочлен степени d , коэффициенты которого принадлежат $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, а остаток $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ является его корнем, т.е. $p(a) = 0$, то $p(x)$ делится на двучлен $x - a$, значит, представляется в виде $p(x) = q(x)(x - a)$. Для доказательства этого факта разделим $p(x)$ на $x - a$ с остатком: $p(x) = q(x)(x - a) + r$ и подставим в качестве x значение a . Левая часть

окажется равной нулю, стало быть, и $r = 0$. Степень многочлена $q(x)$ будет на единицу меньше, чем степень $p(x)$, а значит, и корней у него не более $d - 1$ по предположению индукции. А корни многочлена $p(x)$ – это a и корни многочлена $q(x)$ (здесь мы используем отсутствие делителей нуля в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$). Поэтому их не больше d , что и требовалось.

Из критерия Эйлера очевидно следует мультипликативность символа Лежандра. Действительно,

$$\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}} b^{\frac{p-1}{2}} = (ab)^{\frac{p-1}{2}} = \left(\frac{ab}{p}\right).$$

Кроме того, с помощью критерия Эйлера легко понять, когда -1 является квадратичным вычетом, а когда – невычетом:

Следствие 3. *Имеет место равенство*

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = \begin{cases} 1, & p = 4k + 1, \\ -1, & p = 4k + 3. \end{cases}$$

«Положительные» и «отрицательные» остатки. Выпишем все элементы из $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ в следующем порядке:

$$-\frac{p-1}{2}, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}.$$

Условимся называть те из них, которые выписаны слева от нуля, «отрицательными», а те, что справа – «положительными».²

Рассмотрим произвольный ненулевой элемент $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ и умножим его на все «положительные» элементы. Получим элементы $a, 2a, \dots, \frac{p-1}{2}a$.

Нетрудно доказать следующее утверждение.

Предложение 4. *Множество $\left\{a, 2a, \dots, \frac{p-1}{2}a\right\}$ содержит ровно по одному элементу из каждой пары $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{p-1}{2}$.*

Доказательство. Ранее мы уже видели, что разные элементы из $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ при умно-

² Не надо путать положительные/отрицательные элементы в смысле этого обозначения с квадратичными вычетами/невычетами.

жении на произвольное ненулевое a не могут переходить в один и тот же элемент: это противоречило бы тому, что в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ нет делителей нуля.

Докажем, что для различных «положительных» элементов $k \neq l$ элементы ak и al не могут быть противоположны друг другу. Действительно, это значило бы, что

$$0 = ak + al = a(k + l),$$

откуда $k + l = 0 \pmod{p}$. Но этого не может быть: поскольку $0 < k, l \leq \frac{p-1}{2}$, то $0 < k + l < p$, значит, $k + l \neq 0 \pmod{p}$.

Поэтому среди элементов $a, 2a, \dots, \frac{p-1}{2}a$ встречается не более одного элемента из каждой пары $\pm k$. Но элементов и пар по $(p-1)/2$ – стало быть, из каждой пары $\pm k$ выйдет ровно один остаток.

Обозначим через $\varepsilon(a)$ количество «отрицательных» элементов во множестве $\left\{a, 2a, \dots, \frac{p-1}{2}a\right\}$, т.е. число таких «положительных» элементов, которые при умножении на a становятся «отрицательными».

Предложение 5 (лемма Гаусса). *Имеет место равенство $(-1)^{\varepsilon(a)} = \left(\frac{a}{p}\right)$. Иначе говоря, $\varepsilon(a)$ чётно, если a – квадратичный вычет, и нечётно в противном случае.*

Доказательство. Перемножим все остатки $a, 2a, \dots, \frac{p-1}{2}a$. В силу предыдущего рассуждения мы получим, что это произведение равно

$$a \cdot 2a \cdot \dots \cdot \frac{p-1}{2}a = (-1)^{\varepsilon(a)} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \frac{p-1}{2}.$$

Но, с другой стороны, оно же равняется $a \cdot 2a \cdot \dots \cdot \frac{p-1}{2}a = a^{\frac{p-1}{2}} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \frac{p-1}{2} = \left(\frac{a}{p}\right) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \frac{p-1}{2}$

(в последнем равенстве использован критерий Эйлера).

Поделив обе части на отличную от нуля величину $((p-1)/2)!$, получаем требуемое равенство.

Это предложение позволяет вычислить символ Лежандра для некоторых значений a .

Пример 3. Убедимся еще раз, что $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$. Действительно, при умножении на -1 все «положительные» числа становятся «отрицательными» – а их всего $(p-1)/2$.

Выясним, когда число 2 является квадратичным вычетом по модулю p . Оказывается, что это зависит от остатка от деления p на 8: если он равен 1 или 7, то 2 будет квадратичным вычетом, а если 3 или 5, то невычетом.

Предложение 6. *Имеет место равенство*

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = \begin{cases} 1, & p = 8k \pm 1, \\ -1, & p = 8k \pm 3. \end{cases}$$

Доказательство. Умножим все «положительные» элементы на 2; получим элементы вида

$$2, 4, \dots, p-3, p-1.$$

«Отрицательными» будут те из них, которые будут заключены между $p/2$ и $p-1$. Их количество, как нетрудно видеть, будет равно $\left\lceil \frac{p-1}{4} \right\rceil$ (т.е. числу $\frac{p-1}{4}$, округленному до ближайшего целого *вверх*).

Эта величина и будет равна $\varepsilon(2)$; мы хотим найти ее четность. Проще всего сделать это, разобрав четыре возможных случая:

- если $p = 8k + 1$, то $\varepsilon(2) = \left\lceil \frac{p-1}{4} \right\rceil = 2k$;
- если $p = 8k + 3$, то $\varepsilon(2) = \left\lceil 2k + \frac{1}{2} \right\rceil = 2k + 1$;
- если $p = 8k + 5$, то $\varepsilon(2) = \lceil 2k + 1 \rceil = 2k + 1$;
- наконец, если $p = 8k + 7$, то $\varepsilon(2) = \left\lceil 2k + \frac{3}{2} \right\rceil = 2k + 2$.

Гипотеза Эйлера. Посмотрим еще раз на предложение 6. Оно утверждает, что 2 является или не является квадратичным вычетом по модулю p в зависимости от

остатка, который p дает при делении на 8. Вообще говоря, это совершенно удивительно: оказывается, что при фиксированном нечетном r для всех простых чисел вида $8k + r$ двойка является или не является квадратичным вычетом одновременно!

Кстати, то же самое мы видели и для -1 : является ли -1 вычетом или невычетом по модулю p , зависит лишь от остатка, который p дает при делении на 4.

Эйлер высказал гипотезу, что так будет и для любого числа a : символ Лежандра $\left(\frac{a}{p}\right)$ будет зависеть только от остатка, который p дает при делении на $4a$.

Сам Эйлер доказать эту гипотезу не смог; это было сделано Гауссом, который установил, как связаны между собой квадратичные вычеты по различным простым модулям. Это утверждение он назвал *золотой теоремой* (Theorema Aureum), а нам оно сегодня известно как *квадратичный закон взаимности*. В следующем разделе мы изложим одно из многочисленных доказательств этой теоремы, принадлежащее ученику Гаусса, Эйзенштейну.

Кстати, слово «многочисленные» – отнюдь не преувеличение. Существуют доказательства квадратичного закона взаимности, опирающиеся на самые разные идеи; сам Гаусс придумал около восьми разных доказательств. Немецкий математик Франц Леммермайер на своей странице <https://www.rzuser.uni-heidelberg.de/~hb3/rchono.html> собрал 246 различных доказательств этой теоремы, последние 15 из которых были опубликованы в течение последнего десятилетия.

Теорема 5 (гипотеза Эйлера). *Число a одновременно будет квадратичным вычетом или невычетом для всех простых чисел, входящих в арифметическую прогрессию $4an + r$, где $n = 0, 1, 2, \dots$ и $0 < r < 4a$.*

Замечание. Понятно, что если первый член прогрессии r и ее разность $4a$ не взаимно просты, то таких простых чисел при $n \geq 1$ не будет (все члены прогрессии будут делиться на их общий делитель). Теорема Дирихле утверждает, что если

первый член и разность арифметической прогрессии взаимно просты, то она будет содержать бесконечно много простых чисел.

Упражнение 6. Докажите, что количество простых чисел вида: а) $4k + 3$; б*) $4k + 1$ бесконечно.

Квадратичный закон взаимности Гаусса

Формула для $\epsilon(a)$. В предыдущем разделе мы вычислили $\epsilon(2)$, найдя число таких «положительных» элементов из $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, которые при умножении на 2 переходят в «отрицательные». А именно, эти элементы получаются из целочисленных x , удовлетворяющих двойному неравенству $p/4 < x < p/2$. Напротив, целочисленные решения неравенства $0 < x < p/4$ соответствуют «положительным» элементам, при умножении на 2 переходящим в «положительные».

Это можно представить себе следующим образом. Расположим остатки от 0 до $p-1$ в вершинах правильного p -угольника с координатами $(\cos 2\pi k/p; \sin 2\pi k/p)$. Тогда «положительные» остатки будут отвечать вершинам, лежащим в верхней полуплоскости (выше оси Ox), а «отрицательные» – соответственно, ниже Ox . Умножение элемента на 2 отвечает удвоению соответствующего угла, так что при этом вершина с номером k перейдет в вершину с номером $2k$. Поэтому в «положительные» элементы при этом отображении перейдут вершины, лежащие в I и III четвертях, а в «отрицательные» – соответственно, во II и IV. Поэтому интересующее нас число «положительных» элементов, переходящих в «отрицательные», есть не что иное, как количество вершин p -угольника, лежащих во II четверти.

Ясно, что это рассуждение можно обобщить для произвольного числа a , не только для 2. Для этого разобьем нашу плоскость на $2a$ одинаковых секторов и покрасим их поочередно в белый и серый цвета, как показано на рисунке 1. Вершины правильного p -угольника, попавшие в белые сектора, будут отвечать ненулевым элементам из $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, переходящим при умно-

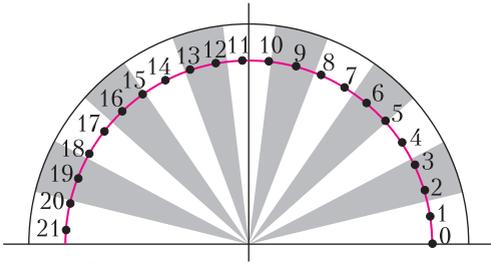


Рис. 1. «Положительные» остатки по модулю $p = 43$ (от 1 до 21), попавшие в серые сектора, переходят при умножении на $a = 13$ в «отрицательные»

жени на a в «положительные» элементы; те же вершины, которые попали в серые сектора, будут при умножении на a переходить в «отрицательные». На рисунке 1 показан пример, в котором $p = 43$ (т.е. «положительными» являются остатки от 1 до 21), а $a = 13$.

Отметим, что в силу простоты p (вернее, взаимной простоты p и a) на границу секторов попадет единственная вершина p -угольника – а именно, та, что отвечает элементу $0 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Итак, количество $\varepsilon(a)$ таких «положительных» элементов $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, которые при умножении на a переходят в «отрицательные», равняется количеству вершин p -угольника, лежащих выше оси абсцисс и при этом попадающих в серые сектора.

Всего таких секторов будет $\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$ (т.е. число $\frac{a}{2}$, округленное до ближайшего целого вниз). Ясно, что соответствующие вершины при этом будут иметь номера n , удовлетворяющие одному из следующих неравенств:

$$\begin{aligned} p/2 < an < p; \\ 3p/2 < an < 2p; \\ 5p/2 < an < 3p; \\ \dots \end{aligned}$$

Тем самым, количество «положительных» элементов, переходящих при умножении на a в «отрицательные», есть в точности количество таких n , где

$$1 \leq n \leq \frac{p-1}{2} \text{ и } \left\lfloor \frac{2an}{p} \right\rfloor \text{ нечетно.}$$

Это можно сформулировать в виде следующей леммы.

Лемма 1 (Эйзенштейн). *Имеет место равенство*

$$\left(\frac{a}{p} \right) = (-1)^{\sum_{n=1}^{(p-1)/2} \left\lfloor \frac{2an}{p} \right\rfloor}.$$

Доказательство. Предыдущее обсуждение показывает, что $\left(\frac{a}{p} \right)$ равно 1 или -1

в зависимости от того, является ли количество нечетных чисел среди чисел вида $\left\lfloor \frac{2an}{p} \right\rfloor$ четным или нечетным. Теперь просуммируем все числа такого вида и воспользуемся простым наблюдением: сумма целых чисел нечетна тогда и только тогда, когда в нее входит нечетное число нечетных слагаемых.

Квадратичные вычеты и целые точки. В этом разделе мы установим взаимосвязь между квадратичными вычетами по различным модулям. Для этого зададимся различными простыми нечетными числами p и q .

Положим в предыдущей формуле $a = q$ и интерпретируем сумму в ее правой части геометрически. Нарисуем на координатной плоскости прямоугольник высоты q и ширины p с вершиной в начале координат, лежащий в первой четверти (рис. 2). Коор-

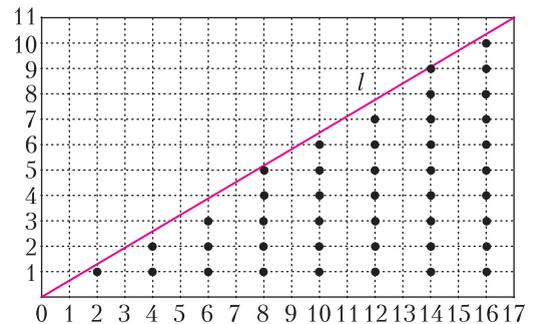


Рис. 2. Здесь $p = 17, q = 11$. Отмечены все точки с четными абсциссами, лежащие ниже прямой l

динаты его точек $(x; y)$ будут удовлетворять неравенствам $0 < x < p, 0 < y < q$. Далее проведем в этом прямоугольнике диагональ l из левого нижнего в правый

верхний угол; она будет иметь уравнение $y = qx/p$.

Рассмотрим какое-нибудь целое число n , где $1 \leq n \leq (p-1)/2$. Возьмем все точки в прямоугольнике с абсциссой $2n$ и целой ординатой, лежащие ниже прямой l . Их ордината должна удовлетворять условию

$$y < \frac{2nq}{p}.$$

Таким образом, число этих точек равно $\left\lfloor \frac{2nq}{p} \right\rfloor$. Суммируя по n , получаем, что четность $\varepsilon(q)$ равна четности количества точек в прямоугольнике, которые лежат ниже прямой l и имеют *четные* абсциссы.

Оказывается, что существует еще более удобная интерпретация $\varepsilon(q)$:

Лемма 2. Четность числа $\varepsilon(q)$ совпадает с четностью числа целых точек в треугольнике, заданном неравенствами $0 < x < p/2$, $0 < y < q/2$, $y < qx/p$ (на рисунке 3 этот треугольник выделен цветом).

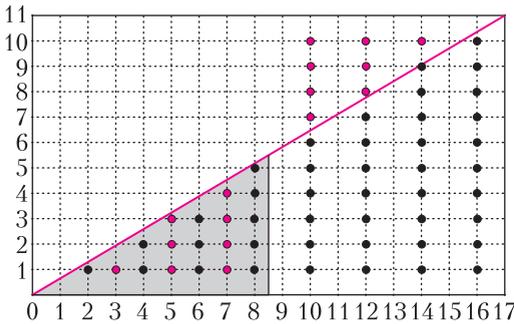


Рис. 3. Четность $\varepsilon(q)$ равна четности числа точек в выделенном треугольнике

Доказательство. Рассмотрим точки, отмеченные на рисунке 2, и добавим к ним еще некоторое количество точек: все точки в выделенном треугольнике, которые еще не отмечены, и центрально-симметричные им относительно центра прямоугольника. На рисунке 3 эти точки отмечены красным. При этом точке с координатами $(x; y)$ будет соответствовать точка с координатами $(p-x; q-y)$ – т.е. точке, лежащей ниже прямой l , будет отвечать точка выше этой прямой, а точке с *нечетной* абсциссой будет соответствовать точка, абсцисса ко-

торой *четна*. В результате у нас будут отмечены:

- во-первых, все целые точки в выделенном треугольнике;
- во-вторых, все точки с четными абсциссами, лежащие правее прямой $x = p/2$. В каждом таком столбце будет $q-1$ точка, т.е. четное число, а значит, общее число таких точек также будет четным.

Значит, четность $\varepsilon(q)$ равна четности числа целых точек в выделенном треугольнике, что и требовалось.

Отсюда немедленно получается квадратичный закон взаимности Гаусса:

Теорема 6 (квадратичный закон взаимности). Для различных нечетных простых чисел имеет место равенство

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}.$$

Доказательство. В предыдущих обозначениях рассмотрим прямоугольник $0 < x < p/2$, $0 < y < q/2$. Его делит пополам прямая l . Как показывает предыдущее обсуждение, число целых точек под ней будет четным или нечетным в зависимости от знака $\left(\frac{q}{p}\right)$. С другой стороны, четность числа точек *над* нею определяется знаком $\left(\frac{p}{q}\right)$. Но всего в прямоугольнике содержится $\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}$ точек, что и дает нам требуемое утверждение.

На практике квадратичный закон взаимности удобно использовать в следующей форме:

Следствие 4. Пусть p, q – различные нечетные простые числа. Символы Лежандра $\left(\frac{p}{q}\right)$ и $\left(\frac{q}{p}\right)$ равны, если хотя бы одно из чисел p, q имеет вид $4k+1$, и различны, если они оба имеют вид $4k+3$.

Из квадратичного закона взаимности легко вывести гипотезу Эйлера (теорема 5).

Доказательство гипотезы Эйлера. Пусть a – такое число, что p и $4ap + p$ одновре-

менно являются простыми. Докажем, что

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a}{4an+p}\right).$$

Поскольку символ Лежандра мультипликативен, можно считать, что число a тоже является простым (почему?). Если $a = 2$, то это утверждение нам уже известно: это предложение 6. Если же нет, то a нечетно, и можно применить к обеим частям требуемого равенства квадратичный закон взаимности:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{p}\right) &= (-1)^{\frac{a-1}{2} \cdot \frac{p-1}{2}} \left(\frac{p}{a}\right); \\ \left(\frac{a}{4an+p}\right) &= (-1)^{\frac{a-1}{2} \cdot \frac{4an+p-1}{2}} \left(\frac{4an+p}{a}\right) = \\ &= (-1)^{\frac{a-1}{2} \cdot \left(\frac{p-1}{2} + 2an\right)} \left(\frac{p}{a}\right). \end{aligned}$$

Ясно, что эти величины равны. Гипотеза Эйлера доказана.

Рекомендуем читателю, который хочет узнать больше об истории гипотезы Эйлера и квадратичного закона взаимности, прочесть главу о Гауссе в замечательной книге С.Г.Гиндикина «Рассказы о физиках и математиках». В ней, в частности, изложено одно из первых доказательств квадратичного закона, полученное самим Гауссом.

Пример использования квадратичного закона взаимности. В качестве примера выясним с помощью квадратичного закона взаимности, разрешимо ли сравнение

$$x^2 \equiv 57 \pmod{179}.$$

Для этого нам нужно вычислить $\left(\frac{57}{179}\right) = \left(\frac{3}{179}\right) \cdot \left(\frac{19}{179}\right)$. Вычислим отдельно каждый из этих символов Лежандра.

Оба числа 3 и 179 дают при делении на 4 остаток 3. Поэтому

$$\left(\frac{3}{179}\right) = -\left(\frac{179}{3}\right) = -\left(\frac{-1}{3}\right) = 1,$$

так как -1 является квадратичным невычетом по модулю 3. Значит, 3 – квадратичный вычет по модулю 179.

Далее, по той же причине (19 тоже имеет вид $4k+3$) получаем, что $\left(\frac{19}{179}\right) = -\left(\frac{179}{9}\right) = -\left(\frac{8}{19}\right) = -\left(\frac{2}{19}\right)$ (поскольку $8 = 2 \cdot 4$, а 4 – полный квадрат). Но число 19 имеет вид $8k+3$, поэтому 2 является квадратичным невычетом по модулю 19. Стало быть, $\left(\frac{19}{179}\right) = 1$, откуда $\left(\frac{57}{179}\right) = 1$, и сравнение $x^2 \equiv 57 \pmod{179}$ разрешимо.

Прозрачное и непрозрачное

Л.АШКИНАЗИ

НА РИСУНКЕ 5 ПРЕДСТАВЛЕНЫ ФОТОГРАФИИ двух образцов – из монокристалла CaF_2 и нанокерамики (поликристалла) $\text{CaF}_2 : \text{Ce}^{3+}$. Оба образца – абсолютно прозрачные!

Теперь обсудим преломление. У газов коэффициенты преломления мало отличаются от единицы, и они вообще мало кого волнуют – кроме астрономов. Откройте зимой окно и посмотрите, как елозит пейзаж,

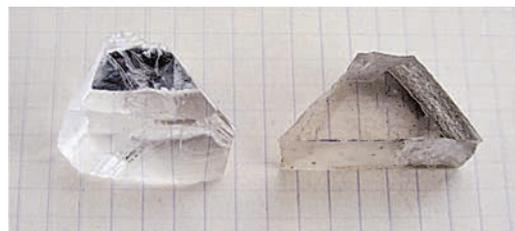


Рис. 5

заж, или просто посмотрите вверх, вспомнив не знаю кем сказанное «человек отличается от животного тем, что иногда под-

нимает глаза к небу», и заметьте, как загадочно подмигивают начинающим интересоваться физикой звезды. И задумайтесь, почему елозит пейзаж и подмигивают звезды... Хаотичное (*турбулентное*) движение в атмосфере потоков воздуха с разной температурой, а значит с разными плотностью и коэффициентом преломления, и вызывает дрожание и размывание изображения. У астрономов есть такое понятие – *астроклимат*, т.е. атмосферные условия, влияющие на качество изображений, куда входит и однородность воздуха.

Жидкости с высокими коэффициентами преломления n называют «иммерсионными» (от латинского *immersio* – погружение). Их применяют для определения показателей преломления, для чего прозрачную частичку исследуемого вещества помещают в иммерсионные жидкости с известными n – при равенстве показателей преломления частичка делается невидимой. Стандартные наборы состоят из 30–100 таких жидкостей с коэффициентами преломления от 1,4 до 2,1, но твердые вещества берут верх. Хотя стекла еле дотягивают до $n = 1,9$, но у алмаза $n = 2,4$, рядышком с ним – титанаты кальция и стронция и иодид таллия ($n = 2,4$), оксид титана ($n = 2,5$) и почти рекордсмен карбид кремния SiC ($n = 2,6$). Именно поэтому SiC, муассанит, используется как имитатор бриллиантов в украшениях (для этого также используется фианит ZrO_2 с добавками, но у него n поменьше). Недавно было синтезировано соединение $Al_3C_2B_{48}$ с рекордным значением $n = 2,9–3,1$, но про него еще мало что известно.

Освоив оптический диапазон, человек стал распространяться на соседние участки электромагнитного спектра. Для этого ему потребовались прежде всего оптические материалы, в частности – прозрачные для всякого рода окошек и преломляющие для линз и призм. Иными словами, потребовался материал, прозрачный в соответствующей области спектра, т.е. не слишком сильно поглощающий излучение. Упрощая, можно сказать, что обычное стекло

прозрачно в диапазоне 0,35–2 мкм, т.е. ультрафиолет УФ оно не пропускает, а инфракрасное излучение ИК пропускает частично. Конечно, эти значения, приводящиеся в справочниках, условны – достаточно тонкая пленка любого материала пропустит любое излучение. Но обычно оптики работают с миллиметрами и требуют пропускания большей части излучения. Естественное решение – кварц. И вот диапазон расширяется в сторону УФ до 0,2 мкм. Есть особые сорта стекол с немного большим доступом в ИК. На этом возможности стекол исчерпаны. В сторону УФ чуть дальше кварца забираются BaF_2 , MgF_2 и LiF – примерно до 0,12 мкм. Со стороны ИК дела обстоят лучше: материалов много, а рекордсменом будет CsI – он добирается примерно до 60 мкм. Практически непрерывно прозрачен алмаз. Вообще же, оптические материалы при увеличении длины волны прозрачны в основном начиная с 200–300 мкм, SiO_2 – с 100 мкм, ZnS – с 50 мкм. Таким образом, самая сложная область – десятки микрометров. Что касается коэффициента преломления, то для материалов ультрафиолетового диапазона он составляет около 1,4, для инфракрасного – группируется вокруг 1,7. Исключения – Si ($n = 3,4$), Ge ($n = 4,1$) и, конечно, алмаз.

На рисунке 6 приведены прозрачности некоторых оптических материалов (отложены по оси ординат) и указаны соответствующие толщины образцов. А на рисунке 7 проиллюстрированы два примера использования материалов, прозрачных вне оптического диапазона. Это микросхема памяти с кварцевым окошком для стирания информации ультрафиолетом и линза из хлорида калия KCl для работы в инфракрасном диапазоне.

Если все-таки говорить о пластинках толщиной в миллиметры, то для волн короче 0,1 мкм с прозрачными материалами дела обстоят плохо, т.е. почти никак. Поэтому приходится довольствоваться отражательной оптикой. Но и тут все не здорово – металлы в диапазоне УФ отражают плохо. Например, Ag при длине волны более 0,4 мкм отражает, как и

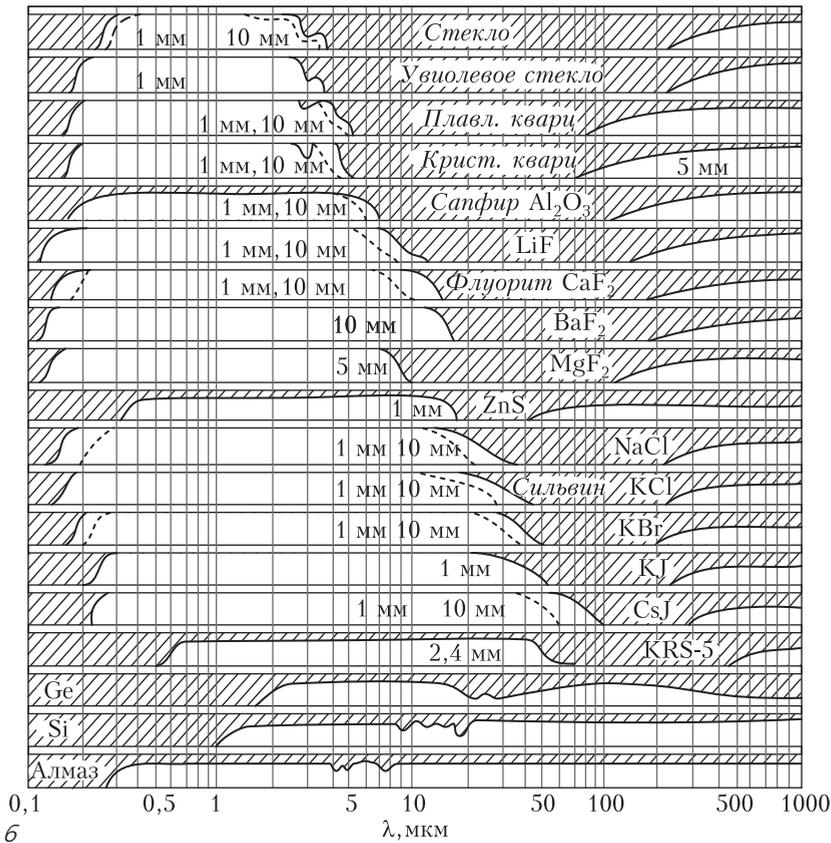


Рис. 6

положено хорошему металлу, 90% и более, но при 0,25 мкм отражает только 30%. С

остальными металлами дело обстоит еще хуже, разве что Al, причем именно при 0,25–0,4 мкм, ведет себя лучше (отражает 90%). Вот они вдвоем и изображают из себя рекорсменов. Поднять отражение, и существенно, удастся «просветлением» – нанесением на металл интерференционных покрытий. Так можно получить отражение 50% на волне 0,01 мкм – а ведь это уже почти рентген.

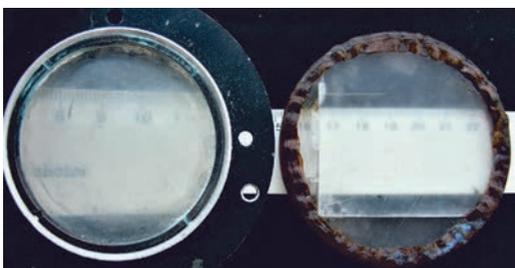
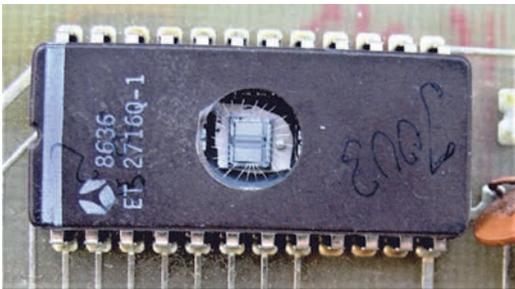


Рис. 7

Коэффициенты отражения от гладких поверхностей некоторых металлов в зависимости от длины волны приведены на рисунке 8. На фрагментах *а*) и *б*) показано влияние технологии изготовления алюминиевого зеркала на величину коэффициента отражения: 1 – когда зеркало напылено в высоком вакууме (10^{-6} Тор), 2 – когда в сверхвысоком вакууме (10^{-9} Тор). Даже в пределах оптического диапазона коэффициент отражения для некоторых металлов изменяется заметно. Например, для длины волны 0,4–0,7 мкм

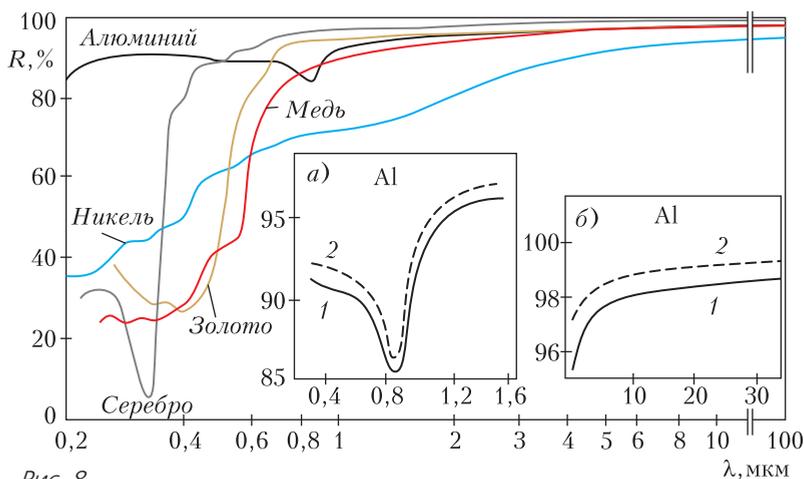


Рис. 8

коэффициент отражения Au составляет 0,39–0,95, для Cu – 0,55–0,96, для Al – 0,92–0,90, для Ag – 0,97–0,99. Поэтому Au и Cu иного, нежели Al и Ag, цвета. Человек с хорошим цветным зрением или металловед отличит никелевое покрытие от хромового – первое немного желтее. Иногда вариации цвета совершенно неожиданны. Так, принято считать, что у тантала – голубой оттенок. Но таков только тантал, имеющий примесь ниобия Nb около 3%, а чистый тантал – серый.

Что касается отражения от порошков, то порошок выглядит белым, если размер порошинок таков, что отражение преобладает над поглощением. Поэтому чем сильнее поглощение, тем мельче надо раздробить вещество, чтобы порошок побелел. Поглощение графита столь велико, что для реально достижимых размеров частиц оно преобладает над отражением.

Особый случай представляет отражение от неоднородных сред или сильно шероховатых поверхностей – например, от естественных, природных. Ведь для описания их формы надо вводить разные масштабы – «шероховатость» в масштабе метров и километров может влиять иначе, чем мелкомасштабная. Так, до сих пор не ясно, почему яркость диска Луны не убывает к краю. При падении света на рассеивающую поверхность она должна отражать по касательной (ниже мы это обсудим чуть подробнее) совсем мало света,

поэтому край диска Луны, который мы наблюдаем именно что по касательной, должен быть темным. Одна из гипотез состоит в том, что плоские участки поверхности Луны темнее склонов гор, и поэтому край диска, на котором мы видим в основном склоны, кажется относительно ярче (гипотеза Галилея). В более поздних моделях учитывали рельеф разного порядка – и горы, и отдельные камни. Другая гипотеза предполагает, что в поверхностном слое Луны много стеклянных шариков (оплавление при ударах метеоритов?), которые действуют, как катафот, т.е. отражают свет навстречу падающему лучу, навстречу Солнцу. А в полнолуние это будет как раз направление на Землю. Но это объяснение не действует в остальное время.

Жидкости в качестве «оптических материалов» используются весьма редко. Кроме указанных выше случаев иммерсионных жидкостей известно использование в астрономии некоторых жидкостей для заполнения полостей в объективах. Оптические свойства жидкостей в инфракрасной области используются очень широко, но не оптиками, а химиками – для установления состава. Соответственно, и оптические свойства газов используются для исследования смесей газов. Важны эти свойства и для расчета тепловых процессов в атмосфере. Есть, правда, один случай, когда смесь газов (а

именно – атмосфера) используется как оптическая среда – при лазерной связи. Но тут нет выбора, атмосфера уж какая есть, такая и есть, и связисты говорят лишь об «окнах прозрачности». Для обычной атмосферы это окно 0,3–1,3 мкм – как раз наше зрение, окошки 1,5–1,8 мкм, 2,0–2,6 мкм, 3,5–4,0 мкм, 4,3–5,5 мкм, окна 7,0–15,0 мкм (этим пользуются змеи) и 30–70 мкм, форточки в области 1 мм и 3 мм, а далее начиная с 1 см это уже радиодиапазон.

И еще в одной ситуации важно добиться предельно малого поглощения – это тоже дальняя связь, только не по воздуху, а по стеклу. Оптоволокно для передачи сигнала на большое расстояние делается из SiO_2 , т.е. из кварца. Главный параметр оптоволокна – способность передавать сигнал с малыми искажениями на большое расстояние. Искажения и потери зависят от материала, конструкции и эксплуатации. Конкретно – от материала нужны малые потери (т.е. поглощение и рассеивание) и дисперсия. Чтобы уменьшить потери, нужно использовать диапазон 1,2–1,7 мкм и уменьшать примеси Fe, Cr, Cu, Co, V, Mo, OH-групп. Именно выяснение причин потерь и получение кварца с низким содержанием этих примесей дало в свое время возможность начать активно применять световоды. С тех пор потери уменьшены примерно раз в сто, сегодня рекорд 0,15 дБ/км, причем это почти теоретический предел. (Про размерность *децибел на километр* можно посмотреть в интернете.) Предел – «релеевское рассеивание», то самое, из-за которого небо голубое, оно дает 0,13 дБ/км. Но ослабление 0,13–0,15 дБ/км означает, что на километровом куске кабеля сигнал теряет 3–3,5% мощности.

Чтобы сделать световод, нужен способ управления коэффициентом преломления. И тут нам повезло – есть примеси, которые его понижают (фтор F, бор B) и увеличивают (алюминий Al, германий Ge, фосфор P), но не вызывают поглощения. Материал должен быть сверхчистым именно по поглощающим примесям и надо обеспечить оптимальную концентрацию полез-

ных, причем переменную по сечению волокна, т.е. оптимально зависящую от радиуса. В технике не так много областей, для которых нужны сверхчистые вещества. Общеизвестный пример – полупроводниковая техника: многие примеси катастрофически влияют на свойства. Другой пример – атомная техника: так, в реакторных материалах должна быть мала примесь веществ, поглощающих нейтроны (B, Li, Cd). Оптоволокно с концентрацией примесей порядка 10^{-8} процента по массе – третий пример.

Вне диапазона 1,2–1,7 мкм потери в SiO_2 увеличиваются, а использовать видимое или более далекое ИК-излучение тоже хочется. Поэтому для видимого диапазона существует оптоволокно из «обычных» стекол: натрий–кальций–кремний ($\text{Na}_2\text{O}-\text{CaO}-\text{SiO}_2$) или натрий–бор–кремний ($\text{Na}_2\text{O}-\text{B}_2\text{O}_3-\text{SiO}_2$). В ИК-диапазоне применяют фторидные (например, на $\text{ZrF}_4-\text{BaF}_2$) и халькогенидные (As_2S_3 , As_2Se_3) стекла, а также кристаллические материалы на основе TlCl , AgCl . Разнообразие материалов этих групп довольно велико и выделить лучшие трудно – пока что потери в них всех довольно велики и используют их для передачи только на короткие расстояния. Но теоретически в оптоволокне из этих материалов возможно достижение даже лучших параметров, нежели в SiO_2 , поэтому нас еще ждут приключения. И эти приключения могут стать вашими приключениями, если вы будете их искать и найдете...

Теперь – о том, с чего мы начали статью, т.е. о блеске. В природе его немного, зато сороки и некоторые люди его любят. В результате в человеческом обществе образовалась «субкультура блеска», сильно пересекающаяся со всем ювелирным. Специалисты по минералам считают, что по характеру блеска минералы можно разделить на три группы: с металлическим, полуметаллическим и неметаллическим блеском. Металлический блеск минералов напоминает блеск гладкой свежей поверхности металла. Он характерен для непрозрачных минералов (галенит, пирит, халькопирит, самородные золото, серебро,

платина). Названия некоторым из этих минералов первоначально давались по их интенсивному металлическому блеску, например – свинцовый блеск (галенит), сурьмяный блеск (антимонит). Полуметаллический блеск сходен с блеском потускневшей поверхности металла и встречается у непрозрачных и полупрозрачных минералов (графит, гематит, темный сфалерит, магнетит). Наиболее широко распространён неметаллический блеск. Он характерен для целого ряда прозрачных и полупрозрачных минералов. Выделяется достаточно большое количество разновидностей неметаллического блеска:

- **стеклянный** – напоминающий блеск поверхности стекла, это самый распространённый вид блеска, им обладают около 70% всех минералов (кварц на гранях кристаллов, кальцит, доломит, флюорит, полевые шпаты);

- **алмазный** – очень сильный искрящийся блеск, нередко затушевывающий собственную окраску минерала (алмаз, светлый сфалерит, касситерит);

- **жирный** – близкий к стеклянному, но несколько более тусклый блеск, когда поверхность минерала кажется покрытой пленочкой жира (кварц на изломе, нефелин, самородная сера);

- **перламутровый** – аналогичен блеску перламутровой раковины с радужными переливами, характерен для пластинчатых минеральных агрегатов (мусковит, гипс, тальк);

- **шелковистый** – наблюдается при тонковолокнистом строении минералов и напоминает блеск шелковых нитей (асбест, волокнистый гипс);

- **восковый** – тусклый, напоминающий блеск воска, характерен для агрегатов с достаточно грубой поверхностью (халцедон, кремь);

- **матовый блеск** – когда минералы практически не блестят, встречается у тонкодисперсных землистых минеральных агрегатов (каолинит, лимонит, глауконит).

Между тем, остается неясным, при каких условиях человек называет отраженный сигнал оптического диапазона «блеском». Оказывается, мозг называет блес-

ком не просто хорошо отражающее, а отражающее узким пучком лучей, причем так, чтобы лучи попали преимущественно только в один глаз. Об этом подробно и увлекательно рассказывается, например, в книге Я.И.Перельмана «Занимательная физика» (книга 1, глава 9). Впрочем, эту книгу можно просто пересказывать всю, так что скачайте ее из интернета и читайте сами на досуге.

В заключение заметим, что когда мы говорим об оптических свойствах, то всегда подразумеваем видимое глазом, т.е. определенную частоту излучения и определенный – видимый – размер объекта. Но бывают другие частоты и другие размеры объектов. Ультрафиолетовое и инфракрасное излучения анализируют традиционно вместе с видимым, а по мере удаления от радуги и попадания в область рентгеновского излучения и миллиметровых радиоволн, когда вещества начинают вести себя существенно иначе, мы попадаем в другой, не менее интересный раздел учебника. Что же до размеров объекта, то вещества состоят из атомов и молекул, и мы вправе спросить, как фотон взаимодействует с одиночным атомом или молекулой и как из взаимодействия с одиночным атомом получается взаимодействие с молекулой и веществом.

Фотоны могут либо поглощаться, либо рассеиваться, причем рассеивание существенно при значительно больших энергиях (рентген, гамма-излучение). Поглощение может происходить через передачу энергии либо электронам в атоме, либо колебаниям атомов в молекуле, либо электронному газу в проводниках. А дальше – или излучение атома, который поглотил фотон (люминесценция, отражение диэлектриками), или колебания электронного газа и его излучение (отражение света металлами), или переход в тепло (именно поэтому металлы отражают поразному, а коты так любят греться на солнышке).

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи M2578–M2581 предлагались на IV Олимпиаде мегаполисов.

Задачи Ф2585, Ф2587 и Ф2588 предлагались на заочном туре Московской физической олимпиаде этого года.

Задачи M2578–M2581, Ф2585–Ф2588

M2578. Даны простые числа p , q , r и натуральное n такие, что величины

$$\frac{p+n}{qr}, \frac{q+n}{rp}, \frac{r+n}{pq}$$

являются целыми числами. Докажите, что $p = q = r$.

Н. Агаханов

M2579. На экзамен пришли 100 студентов. Преподаватель по очереди задает каждому студенту один вопрос: «Сколько из 100 студентов получают оценку “сдал” к концу экзамена?» В ответ студент называет целое число. Сразу после получения ответа преподаватель объявляет всем, какую оценку получил студент: “сдал” или “не сдал”.

После того, как все студенты получают оценку, придет инспектор и проверит, есть ли студенты, которые дали правильный ответ, но получили оценку . Если хотя бы один такой студент найдется, то преподаватель будет отстранен от работы, а оценки всех студентов заменят на “сдал”. В противном случае никаких изменений не произойдет.

Могут ли студенты придумать стратегию, которая гарантирует им всем оценку “сдал”?

Д. Афризонов

M2580. Дана выпуклая четырехугольная пирамида с вершиной S и основанием $ABCD$, причем существует сфера, вписанная в эту пирамиду (т.е. расположенная внутри пирамиды и касающаяся всех ее граней). Пирамиду разрезали по ребрам SA , SB , SC , SD и отогнули грани SAB , SBC , SCD , SDA вовне на плоскость $ABCD$ так, что получился многоугольник $AKBLCMDN$, как показано на рисунке 1.

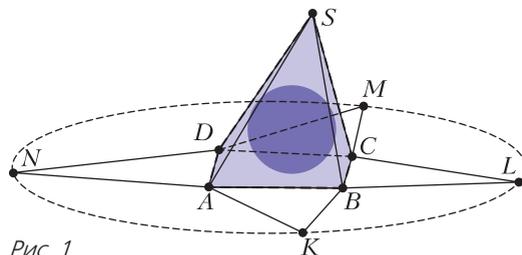


Рис. 1

Докажите, что точки K , L , M , N лежат на одной окружности.

Т. Бакош, Г. Кош (Венгрия)

M2581. В социальной сети с фиксированным конечным числом пользователей каждый пользователь имеет фиксированный набор подписчиков среди остальных пользователей. Кроме того, каждый пользователь имеет некоторый начальный рейтинг – целое положительное число (не обязательно одинаковое для всех пользователей). Каждую полночь рейтинг каждого пользо-

вателя увеличивается на сумму рейтингов, которые имели его подписчики непосредственно перед полуночью.

Пусть m – некоторое натуральное число. Хакер, не являющийся пользователем сети, хочет, чтобы рейтинги всех пользователей делились на m . Раз в день он может либо выбрать некоторого пользователя и увеличить его рейтинг на 1, либо ничего не делать. Докажите, что через несколько дней хакер сможет достичь своей цели.

В.Новиков

Ф2585. Цилиндр заполнен материалом с множеством однородно распределенных пор, число которых в единице объема цилиндра 100 см^{-3} . Слева в цилиндр со скоростью $u = 5 \text{ см/с}$ вдвигают поршень. Перед ним образуется область уплотнения (рис.2), в которой объем каждой поры

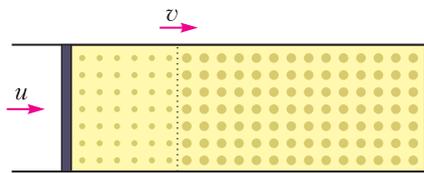


Рис. 2

уменьшается на 5 мм^3 . Считайте, что плотность материала между порами не изменяется.

- 1) Найдите скорость v границы раздела уплотненной и неуплотненной частей. Ответ выразите в см/с , округлите до целых.
- 2) Найдите число пор в единице объема цилиндра в области уплотнения. Ответ выразите в см^{-3} , округлите до целых.

И.Воробьев

Ф2586. Самолет вылетел из аэропорта Пулково (Санкт-Петербург) в 00 часов 00 минут по московскому времени и летит все время с постоянной по величине скоростью $v = 100 \text{ км/ч}$ в направлении на юго-запад. В какое время (по Москве) самолет пересечет экватор и какую страну смогут увидеть пассажиры в иллюминаторы самолета?

С.Варламов

Ф2587. Чтобы передвинуть поддон, на котором находилось 1000 кирпичей, ис-

пользовали грузовик. Когда прикрепили трос к верхнему крючку поддона (рис. 3,а), то грузовик пробуксовывал и не смог сдвинуть груз. Чтобы он смог сдвинуть груз, нужно снять не менее 315 кирпичей.

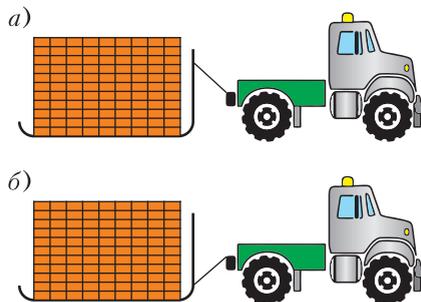


Рис. 3

Если же прикрепить трос к нижнему крючку (рис.3,б), то грузовик сможет сдвинуть груз, даже если к исходным 1000 кирпичам добавить 315 кирпичей. В обоих случаях трос образовывал один и тот же угол с горизонтом. Определите массу грузовика «в кирпичах», если масса поддона равна массе 125 кирпичей. Ответ округлите до целых. Коэффициент трения колес и поддона о землю одинаковый, двигатель передает вращение на все колеса.

А.Бычков

Ф2588. Участок электрической цепи содержит семь резисторов (рис.4). Устройство, в состав которого входит этот участок цепи, корректно работает, если номиналы указанных резисторов равны их номерам: $R_1 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = 2 \text{ Ом}$ и т.д. Резистор R_2 перегорел и заменить его новым резистором номиналом 2 Ом невозможно. Для восстановления работоспособности устройства один из оставшихся резисторов заменили резистором другого номинала.

- 1) Какой резистор было заменен? Укажите номер этого резистора.

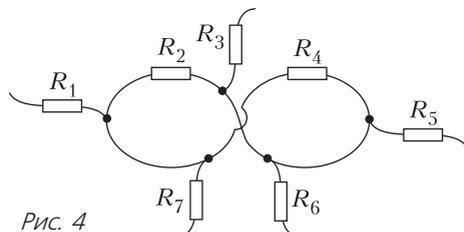


Рис. 4

2) Резистор какого номинала впаяли вместо перегоревшего? Ответ выразите в омах и округлите до сотых.

А.Бычков

**Решения задач M2566–M2569,
Ф2573–Ф2576**

M2566. Существуют ли пять последовательных натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых является точным квадратом?

Ответ: нет, не существуют.

Предположим противное, т.е. что $N = \text{НОК}(n, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4)$ является точным квадратом. Тогда каждое простое число входит в разложение N в четной степени. Каждое простое $p \geq 5$ является делителем не более чем одного из чисел $n, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4$. Значит, если $p \geq 5$ является делителем одного из данных чисел, то оно входит в его разложение на простые множители в четной степени. Число $p = 2$ входит в разложение не более чем трех из данных чисел, причем в разложение хотя бы одного из них – в четной степени, значит, $p = 2$ присутствует в нечетной степени в разложении не более чем двух из данных чисел. Аналогично, $p = 3$ присутствует в нечетной степени в разложении не более чем одного из данных чисел. Таким образом, среди данных пяти чисел не менее двух чисел имеют в своем разложении только четные степени простых чисел, т.е. являются точными квадратами. Пусть это будут x^2 и y^2 для некоторых натуральных $x < y$. Тогда $4 \geq y^2 - x^2 \geq (y - x)(y + x)$, что возможно только при $x = 1, y = 2$. Значит, единственный оставшийся вариант: $\text{НОК}(1, 2, 3, 4, 5) = 60$ – не точный квадрат. Задача решена.

Аналогичным образом можно показать, что $N = \text{НОК}(n, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4)$ не может быть точной степенью (больше первой) натурального числа.

П.Кожевников

M2567. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC выбраны соответственно точки K, L, M , а внутри треугольника

выбрана точка P так, что $PL \parallel BC, PM \parallel CA, PK \parallel AB$ (рис.1). Может ли оказаться, что все три трапеции $AMPL, BKPM, CLPK$ – описанные?

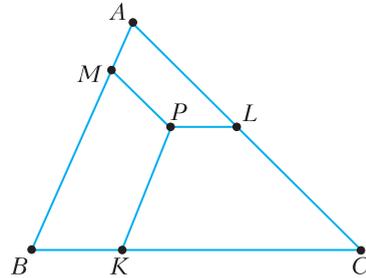


Рис. 1

Ответ: нет, не может.

Продлим отрезки PK, PL, PM до пересечения со сторонами в точках E, F, G (рис.2). Из критерия описанности имеем

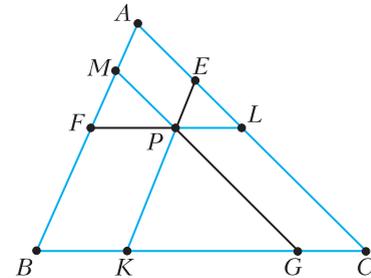


Рис. 2

$AL + PM = AM + PL$, откуда $AE + EL + PM - AM - PL = 0$ или (используя то, что $AMPE$ – параллелограмм)

$$2PM + EL - PE - PL = 0.$$

Сложим это равенство с аналогичными равенствами

$$2PL + GK - PG - PK = 0$$

и

$$2PK + FM - PF - PM = 0,$$

получим

$$(PK + GK - PG) + (PM + FM - PF) + (PL + EL - PE) = 0.$$

Но, согласно неравенству треугольника, каждая скобка в левой части положительна. Противоречие. Задача решена.

Приведем еще одно решение задачи. Предположим, что все три эти трапеции

описанные. Обозначим вписанные окружности через ω_a , ω_b , ω_c соответственно, а их диаметры – через d_a , d_b , d_c . В силу циклической симметрии условия можем считать, что d_c – наибольший из диаметров. Продлим PL до пересечения с AB в точке F (рис.3). Заметим, что d_c равно расстоянию между прямыми LF и BC , т. е.

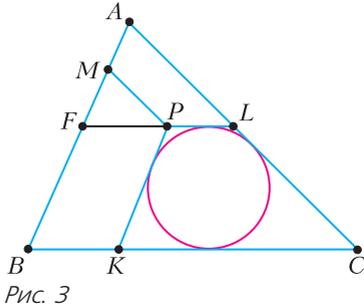


Рис. 3

высоте трапеции $BFLC$. Тогда d_b не больше этой высоты, значит, окружность ω_b целиком содержится внутри трапеции $BFLC$ и не может касаться отрезка MP . Получено противоречие, завершающее решение.

Наконец, приведем идею еще одного оригинального решения, которое придумал на Кавказской олимпиаде десятиклассник из Майкопа Ислам Емиж. Из отрезков PK , PL , PM выберем наименьший по длине. Не умаляя общности, считаем, что этот отрезок – PK . Тогда в описанной трапеции $CLPK$ боковая сторона PK не больше меньшего основания PL . Но несложно доказать, что в описанной трапеции это условие не может выполняться (поскольку, с одной стороны, в любой трапеции разность длин оснований больше разности длин боковых сторон, а с другой стороны, согласно критерию описанности, сумма длин оснований равна сумме длин боковых сторон).

П.Кожевников

M2568. Имеется 15 изначально пустых ящиков. За один ход разрешается выбрать несколько ящиков и добавить в них количества абрикосов, равные некоторым попарно различным степеням двойки. При каком наименьшем натуральном k можно добиться, чтобы после некото-

рых k ходов во всех ящиках оказалось поровну абрикосов?

Ответ: 8.

Пример. Множество ящиков разобьем на подмножество A из 7 ящиков и подмножество B из 8 ящиков. За каждый из 8 ходов положим по $2^7 = 128$ абрикосов в один из ящиков множества B (за разные ходы – в разные ящики), а в остальные ящики множества B ничего не кладем. А в ящики множества A абрикосы раскладываем согласно таблице:

	1 ящик	2 ящик	3 ящик	4 ящик	5 ящик	6 ящик	7 ящик
1 ход	1	2	4	8	16	32	64
2 ход	1	2	4	8	16	32	64
3 ход	2	4	8	16	32	64	–
4 ход	4	8	16	32	64	–	–
5 ход	8	16	32	64	–	–	–
6 ход	16	32	64	–	–	–	–
7 ход	32	64	–	–	–	–	–
8 ход	64	–	–	–	–	–	–

Легко видеть, что в конечном итоге в каждом ящике будет 2^7 абрикосов.

Оценка. Пусть за k ходов количества абрикосов во всех ящиках стали равны N . Обозначим через 2^m наибольшее количество абрикосов, которое положили в какой-либо ящик на каком-либо ходу. Тогда $N \geq 2^m$. С другой стороны, за каждый ход во все ящики положили не более $2^m + 2^{m-1} + \dots + 2^2 + 2 + 1 < 2^{m+1}$ абрикосов, поэтому в конечном итоге общее количество абрикосов, равное $15N$, меньше $2^{m+1} \cdot k$. Имеем $15 \cdot 2^m < 2^{m+1} \cdot k$, откуда $k > 7,5$.

Аналогично можно решать задачу для любого количества t ящиков. Ответом будет $\left\lceil \frac{t+1}{2} \right\rceil$ при нечетном t и $\left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor + 1$ при четном t .

П.Кожевников

M2569*. У Димы есть 100 камней, никакие два из которых не равны по массе. Также у него есть странные двухчашечные весы, на каждую чашку которых

можно класть ровно 10 камней. Назовем пару камней ясной, если Дима может выяснить, какой из камней в этой паре тяжелее. Каково наименьшее возможное количество ясных пар?

Ответ: $C_{100}^2 - C_{19}^2 = 4779$.

Назовем пару камней *плохой*, если она не является ясной.

Пример. Покажем, что возможна такая ситуация, когда будут 19 камней, любые два из которых являются плохой парой, т.е. ни про какие два из камней нельзя выяснить, какой из них легче.

Положим массы камней равными 100, 200, 400, 800, ..., $2^{80} \cdot 100$, $2^{100} + 1$, $2^{100} + 2$, ..., $2^{100} + 19$. Камни с массой больше 2^{100} назовем *тяжелыми*, а остальные – *легкими*. Докажем, что тяжелые камни невозможно различить, даже если мы сравним все возможные пары десятков друг с другом. Это следует из следующих двух утверждений.

Утверждение 1. При сравнении двух групп по 10 камней тяжелее будет та, в которой больше тяжелых камней.

Утверждение 2. При равном количестве тяжелых камней в двух группах тяжелее будет группа, в которую входит самый тяжелый из присутствующих легких камней.

Оценка. Докажем, что ни в каком случае количество плохих пар не превзойдет $171 = C_{19}^2$. Для этого сформулируем еще несколько утверждений.

Утверждение 3. Пара камней XU является плохой тогда и только тогда, когда для любого возможного взвешивания при замене камней из этой пары друг на друга исход взвешивания не меняется.

Доказательство утверждения 3. Достаточность очевидна. Докажем теперь необходимость, т.е. что если после замены X на U исход какого-то взвешивания меняется, то мы можем выяснить про камни X и U , какой тяжелее.

Во время взвешивания каждый из камней X , U мог находиться на левой чашке (L), правой чашке (R) или не участвовать во взвешивании. Если X и U находились в одной группе, то результат взвешивания

не мог измениться. Пусть X и U были на разных чашках, для определенности вначале X на L , а U – на R . Тогда возможны следующие варианты изменения результата взвешивания после перемещения X на R , а U на L (см. таблицу):

До обмена X и U	После обмена X и U	Вывод
$L > R$	$L = R$	$X > U$
$L > R$	$L < R$	$X > U$
$L = R$	$L > R$	$X < U$
$L = R$	$L < R$	$X > U$
$L < R$	$L = R$	$X < U$
$L < R$	$L > R$	$X < U$

Утверждение 4. Если пары XU и XZ плохие, то пара UZ плохая.

Доказательство. Рассмотрим любое взвешивание. Поменяем в нем местами U и X , потом поменяем X и Z , а затем снова X и U . После каждой из этих замен, в силу утверждения 3, результат взвешивания не меняется. А итог этих замен в том, что X остался на своем месте, а U и Z поменялись местами: $XUZY \rightarrow YXZU \rightarrow YZUX \rightarrow XZUY$. Получается, что в произвольном взвешивании при обмене Z и U результат не меняется, значит, пара UZ плохая.

Рассмотрим граф, вершины которого – камни, а ребрами соединим плохие пары. Из утверждения 4 следует, что каждая компонента связности такого графа – полный подграф.

Утверждение 5. Для любых 20 камней A_1, A_2, \dots, A_{20} среди пар $A_1A_2, A_3A_4, \dots, A_{19}A_{20}$ есть хоть одна ясная.

Доказательство. Положим на одну чашку весов камни $A_1, A_3, A_5, \dots, A_{19}$, а на другую – A_2, A_4, \dots, A_{20} . Если весы показали равновесие, то после замены любой пары равновесие нарушится и удастся выяснить, кто в этой паре легче, а кто тяжелее. Если же одна чашка перевесила другую, то будем по очереди менять камни из одной пары, после всех десяти таких изменений результат взвешивания изменится на противоположный. Значит, результат изменится после замены какой-то одной из пар, эта пара и будет ясной.

Рассмотрим теперь компоненты связности графа плохих пар. В каждой из них выделим наибольшее множество непересекающихся пар (так называемое *максимальное паросочетание*). Пусть в i -й компоненте удалось выделить n_i пар. Согласно утверждению 5, сумма всех n_i не превосходит 9. Тогда в i -й компоненте не более $2n_i + 1$ вершин и, стало быть, не более $n_i(2n_i + 1)$ ребер. Значит, общее количество ребер не превосходит суммы $S = \sum n_i(2n_i + 1)$ (сумма берется по всем компонентам). Далее,

$$S = 2\sum n_i^2 + \sum n_i \leq 2(\sum n_i)^2 + \sum n_i \leq 2 \cdot 9^2 + 9 = 171.$$

Нужная оценка доказана.

В.Брагин

Ф2573. Шарик массой M с жесткими пластиковыми стенками после падения (без начальной скорости) с высоты h на стол подскакивает на высоту $0,7h$. Сколько песка (какую массу m) нужно насыпать внутрь шарика, чтобы он после падения с той же высоты подскакивал на высоту $0,3h$?

При ударе оболочки пустого (без песка внутри) шарика о поверхность стола сохраняется 70% механической энергии. (Спротивлением воздуха пренебрегаем.) Это означает, что величины скоростей шарика сразу после удара v_1 и за мгновение до удара v_0 относятся как

$$\frac{v_1}{v_0} = \sqrt{\frac{7}{10}}.$$

Если внутри шарика имеется нужное количество песка, то после удара оболочки и взаимодействия оболочки с песком шарик имеет скорость

$$v_2 = v_0 \sqrt{\frac{3}{10}}.$$

Из закона сохранения импульса можно получить такое соотношение:

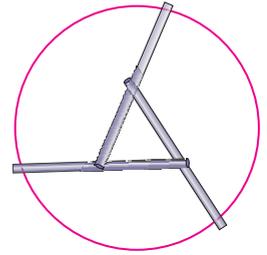
$$Mv_0 \sqrt{\frac{7}{10}} - mv_0 = (M + m)v_0 \sqrt{\frac{3}{10}}.$$

Отсюда находим

$$m = M \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{10} + \sqrt{3}} \approx 0,19M.$$

В.Шариков

Ф2574. На край большой вазы (он показан красной линией на рисунке; вид сверху), стоящей на горизонтальном столе, опираются три одинаковые длинные и тонкие палочки, каждая из которых имеет массу m , распределенную равномерно по всей длине. С какой силой взаимодействуют две из трех палочек? Концы одной палочки касаются края вазы и середины другой палочки.



Суммарная масса всех палочек равна $3m$. Сила тяжести всех палочек компенсируется тремя одинаковыми (в силу симметрии) вертикальными по направлению силами, с которыми на концы палочек действуют края вазы. Иными словами, силы реакции равны по величине mg и направлены вверх. Условие равновесия одной палочки состоит в том, чтобы сумма сил, действующих на нее, и сумма моментов этих сил были равны нулю. На каждую палочку действуют всего четыре силы: сила тяжести, сила со стороны края вазы и силы со стороны двух других палочек, которые должны быть тоже направлены вертикально. Найдем момент сил, действующих на одну из палочек, относительно ее центра масс. Он определяется силами, приложенными к концам палочки. Следовательно, и на второй конец рассматриваемой палочки действует направленная вверх сила, равная по величине mg . Тогда сила, приложенная со стороны другой палочки к центру рассматриваемой палочки, направлена вертикально вниз и тоже равна по величине mg . Это означает, что какую бы пару палочек мы ни выбрали, их сила взаимодействия равна по величине mg .

С.Татилов

Ф2575. Каковы показания одинаковых мультиметров в электрической цепи, изображенной на рисунке 1? Три прибора работают омметрами на диапазоне 2000 кОм, а три других измеряют напряжения. Внутренние сопротивления

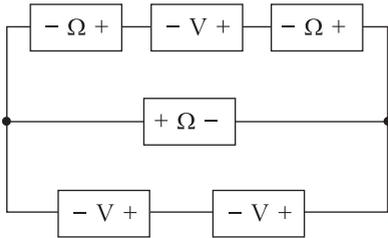


Рис. 1

приборов в этих режимах измерений одинаковы и равны $R = 1 \text{ МОм}$. ЭДС эквивалентной (для внешней цепи) батарейки в каждом омметре равна $\varepsilon = 2,2 \text{ В}$.

Мысленно включим в схему три идеальных амперметра с указанным на рисунке 2

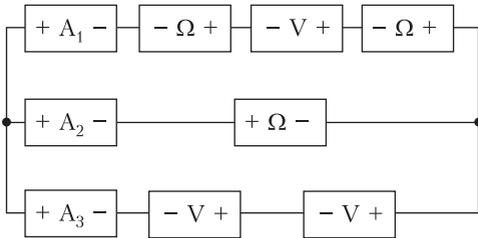


Рис. 2

расположением полярностей входных клемм этих приборов. Для левого узла, к которому подключены все три амперметра, согласно правилу Кирхгофа выполняется соотношение

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

Для узла справа в соответствии с законом Ома можно записать

$$2\varepsilon - 3I_1R = -\varepsilon - I_2R = -2I_3R.$$

Три знака равенства в этих соотношениях означают, что имеются три уравнения для нахождения неизвестных значений токов. Решением системы четырех уравнений будут величины токов

$$I_1 = \frac{8}{11} \frac{\varepsilon}{R}, \quad I_2 = -\frac{9}{11} \frac{\varepsilon}{R}, \quad I_3 = \frac{1}{11} \frac{\varepsilon}{R}.$$

Тогда показания вольтметров будут следующими:

$$U_1 = -\frac{8}{11} \varepsilon \approx -1,6 \text{ В},$$

$$U_2 = U_3 = -\frac{\varepsilon}{11} \approx -0,2 \text{ В}.$$

Каждый омметр, имеющий внутри эквивалентную батарейку с ЭДС ε и внутренним

сопротивлением R и на клеммах которого напряжение равно U , показывает значение сопротивления R_x , равное

$$R_x = R \frac{U}{\varepsilon - U}.$$

Соответственно, показания омметров будут такими:

$$R_{x1} = R_{x2} = \frac{3}{8} R = 375 \text{ кОм},$$

$$R_{x3} = \frac{2}{9} R \approx 222 \text{ кОм}.$$

С.Варламов

Ф2576. Из однородного резинового шнура сделали петлю с «хвостом», т.е. один из концов шнура накрепко привязали узлом к одной из его точек между концами (см. рисунок). Шнур взяли за две точки и растянули так, что петля превратилась



в два вытянутых вдоль друг друга отрезка одинаковой длины и массы, а хвост целиком вытянулся вдоль той же линии, на которой расположены участки петли. При этом все небольшие участки шнура приобрели длину, которая во много раз больше длины этих же участков в недеформированном состоянии. При растяжении шнур подчиняется закону Гука. Если «щелкнуть» по узлу, то волны, пробегающие по шнуру, отразившись от мест крепления, возвращаются к узлу одновременно. Какую долю от всей массы резинового шнура составляет хвост?

Скорость v распространения волн по растянутому с силой F шнуру, имеющему длину L и равномерно по длине распределенную массу m , вычисляется согласно известной формуле $v = \sqrt{FL/m}$. Отсюда следует, что время движения волны от начала участка длиной L до его противоположного конца равно $\Delta t = L/v = \sqrt{mL/F}$. В условии сказано, что растянутый шнур подчиняется закону Гука и что удлинение любого участка шнура во много раз больше его недеформированной длины. Обозначим длину всего нерастянутого шнура

через L_0 . Долю этой длины, приходящейся на хвост, обозначим через x – ее и нужно найти. Длины двух участков петли в нерастянутом состоянии равны, соответственно, $L_0(1-x)/2$. Им пропорциональны массы этих участков шнура. Хвост растянут с силой F , а каждый из двух участков петли растянут с силой $F/2$. Согласно закону Гука сила пропорциональна относительному удлинению участка шнура: $f = k\Delta l/l$. Для удлинений хвоста и участков петли получаются такие

соотношения: $\Delta L_1 = FL_0x/k$ и $\Delta L_2 = (F/2)(L_0(1-x)/2)/k$. Соответственно, для промежутков времени пробегания волн имеем

$$\Delta t_1 = x\sqrt{\frac{L_0m}{k}} = \Delta t_2 = \frac{1-x}{2}\sqrt{\frac{L_0m}{k}}.$$

Отсюда получается величина

$$x = \frac{1}{3}.$$

А.Шнуров

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Мы продолжаем конкурс по решению математических задач. Они рассчитаны в первую очередь на учащихся 7–9 классов, но мы будем рады участию школьников всех возрастов. Конкурс проводится совместно с журналом «Квантик».

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы. Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest

Желаем успеха!

5. По кругу написаны 10 целых чисел. Петя нашел десять сумм двух рядом стоящих чисел. Затем он отдельно выписал эти суммы на листке в некотором порядке. Могло ли оказаться, что:

- на листке выписано 10 последовательных чисел;
- среди выписанных на листке чисел есть 9 последовательных?

Н.Чернятьев

6. Барон Мюнхгаузен заявил, что какой бы треугольник ему ни дали, он сможет разрезать его на два многоугольника, а потом каждый из них разрезать на 7 равных многоугольников.

Могут ли слова барона быть правдой?

И.Акулич

7. Возьмем любое натуральное число, например 2019. Составим второе число, которое показывает, сколько и каких цифр (в порядке возрастания) содержит исходное число. Получится 10111219, что означает «один ноль,

одна единица, одна двойка и одна девятка». На основе второго числа по тому же принципу образуем третье число 10511219, потом – четвертое 1041121519 и т.д.

а) Квантик убежден, что с какого бы числа ни начать, в получившейся последовательности какое-то число непременно встретится дважды. Ноутик считает, что не обязательно – возможна последовательность, в которой все числа различны. Кто прав?

б) Могут ли в такой последовательности встретиться два одинаковых числа подряд?

И.Акулич

8. Докажите для всех натуральных n равенство

$$C_n^0 C_{2n}^n - C_n^1 C_{2n-1}^{n-1} + C_n^2 C_{2n-2}^{n-2} - \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} C_{n+1}^1 + (-1)^n C_n^n C_n^0 = 1.$$

Через C_n^k обозначается количество способов выбрать k предметов из n различных предметов.

В.Расторгуев

Задачи

1. В записи $-2 -3 -4 -4$ расставьте между соседними числами знаки сложения, умножения и скобки двумя способами так, чтобы значения полученных выражений были одинаковыми. (Ставятся только те скобки, которые меняют значение выражения.)

А.Сгибнев, Д.Шноль



2. На клетчатом листе бумаги лежит проволочная рамка в форме креста, как показано на рисунке. На какое наименьшее количество частей нужно разрезать рамку, чтобы из них (используя все) можно было сложить контур квадрата?

Е.Бакаев, С.Токарев



3. У Йоси есть три прибора, которые определяют, есть ли в пончике повидло. Один из приборов всегда дает правильный ответ, второй — всегда неправильный, а третий выдает случайные ответы. Как-то Йося купил три пончика. Ему известно, что ровно один из них — с повидлом. Как ему гарантированно определить, какой именно, не ломая пончики?

Олимпиада «Зута» (Израиль)



4. Соня спит тогда и только тогда, когда часовая и минутная стрелки часов образуют угол, не превосходящий 60 градусов. Сколько времени в течение суток спит Соня?

Фольклор



Эти задачи предлагались на XXV Турнире математических боев имени А.П.Савина.

Замкнутые самопересекающиеся ломаные

А.БЛИНКОВ, А.ГРИБАЛКО

ВЭТОЙ СТАТЬЕ ПОЙДЕТ РЕЧЬ О ЛОМАННЫХ линиях на плоскости. Напомним, что, для того чтобы изобразить ломаную, достаточно выбрать несколько точек (не меньше трех), занумеровать их в каком-нибудь порядке, после чего последовательно соединить отрезками точки с соседними номерами. Выбранные точки называются *вершинами* ломаной, а отрезки – ее *звеньями* (на рисунке 1 – трехзвенная ломаная, у которой четыре вершины).

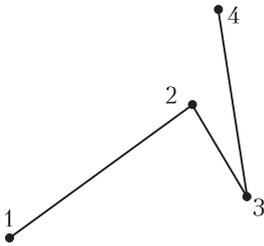


Рис. 1

Если хотя бы два звена ломаной пересекаются (в своих внутренних точках), то ее называют *самопересекающейся* (на рисунке 2 – четырехзвенная самопересекающаяся ломаная).

И наконец, если совместить первую и последнюю вершины ломаной, то ее назы-

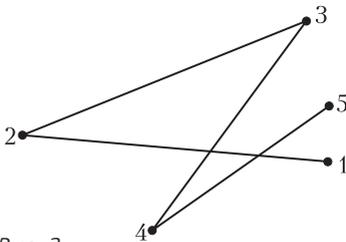


Рис. 2

вают *замкнутой*. В такой ломаной количество вершин совпадает с количеством звеньев (на рисунке 3 – пятизвенная замкнутая ломаная).

Нас прежде всего будут интересовать замкнутые самопересекающиеся ломаные.

Статья была опубликована в журнале «Квантик» №11 за 2019 год.

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20191002>

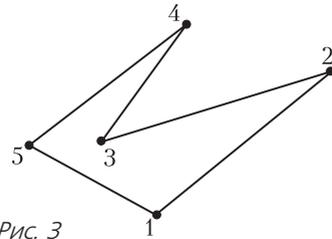


Рис. 3

Начнем с задачи, предложенной А.Пешниным (ее частные случаи были использованы на XXV Турнире математических боев имени А.П.Савина).

Задача 1. Сколько вершин может быть у замкнутой ломаной, которая каждое свое звено пересекает ровно два раза?

Решение. Очевидно, что трехзвенная замкнутая ломаная не может быть самопересекающейся. Замкнутая ломаная с четырьмя вершинами также не удовлетворяет условию задачи, так как соседние звенья пересечься не могут, а для каждого звена есть только одно, не являющееся соседним. Пример пятизвенной ломаной хорошо известен – это пятиконечная звезда. Можно, хотя и не обязательно, изобразить такую ломаную так, чтобы длины всех звеньев были одинаковыми (рис. 4, а; вершины ломаной делят окружность на пять равных частей).

Отметим, что и в данном случае, и в дальнейшем использовать окружность не обязательно, но удобно.

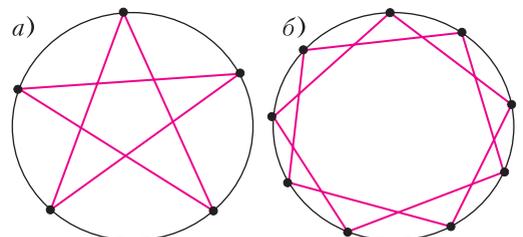


Рис. 4

Этот пример подсказывает, что аналогичным образом можно построить любую ломаную, удовлетворяющую условию, у которой нечетное количество звеньев, большее трех. Действительно, достаточно поставить на окружности требуемое количество вершин и последовательно соединить их через одну. Например, на рисунке 4,б изображена ломаная, у которой девять звеньев.

Таким образом, осталось разобраться с ломаными с четным количеством звеньев, начиная с шести.

Искомой шестизвенной ломаной не существует, но доказать это можно только перебором всех случаев, который не очень интересен.

Для восьми звеньев существует красивый пример (рис.5,а). Аналогично можно построить ломаную, удовлетворяющую

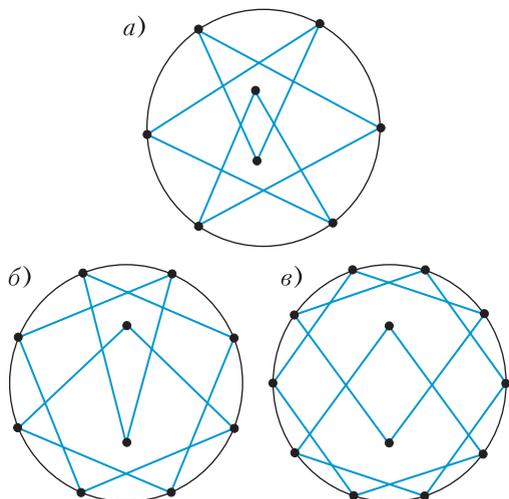


Рис. 5

условию, с любым четным количеством звеньев, большим восьми. Как это делается, понятно из примеров для десяти и двенадцати звеньев, показанных на рисунках 5,б и 5,в. Сначала мы отмечаем на окружности точки, которых на две меньше, чем нужно, и соединяем их через одну. Так как точек четное количество, то получатся две замкнутые ломаные, все звенья которых пересекаются с другой ломаной в двух точках. После этого удаляем по одному звену в каждой ломаной и соединяем ломаные в одну, используя

еще две вершины, расположенные внутри окружности.

Однако есть и более простой способ. Воспользуемся тем, что любое четное число, большее восьми, можно представить в виде суммы двух нечетных слагаемых, каждое из которых не меньше пяти.

Покажем, например, как построить двенадцатизвенную ломаную, удовлетворяющую условию. Изобразим две окружности, которые касаются внешним образом в некоторой точке. В одной из окружностей построим уже указанным способом пятизвенную ломаную, а в другой – семиззвенную, причем точка касания должна быть их общей вершиной. А теперь эту точку «раздвоим» (рис.6; результат раздвоения – вершины с номерами 1 и 6).

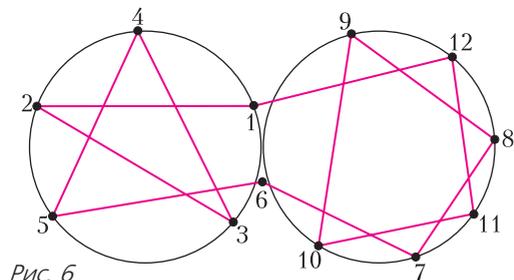


Рис. 6

Аналогично строятся все искомые ломаные, у которых количество звеньев четное и больше восьми.

Возникает вопрос: почему мы начали с двух точек пересечения звеньев, а не с одной, что, казалось бы, более естественно?

Дело в том, что такой порядок более логичен, так как решение следующей задачи будет во многом опираться на решение рассмотренной.

Задача 2. Сколько вершин может быть у замкнутой ломаной, которая каждое свое звено пересекает ровно один раз?

Решение. Сразу заметим, что в этом случае звенья ломаной должны разбиваться на непересекающиеся пары, поэтому у искомых ломаных четное количество звеньев. Легко проверить, что замкнутая ломаная из четырех звеньев условию не удовлетворяет.

Пример искомой ломаной из шести звеньев можно построить, исходя из следую-

щих соображений: помимо того, что не могут пересекаться соседние звенья, не могут пересекаться и звенья, стоящие через одно. Действительно, в этом случае образуется треугольник (рис.7,*а*), в который можно будет только «войти», если пересечь среднее звено, но нельзя будет «выйти». Поэтому надо пересекать первое звено с четвертым, второе – с пятым и третье с шестым (рис.7,*б*).

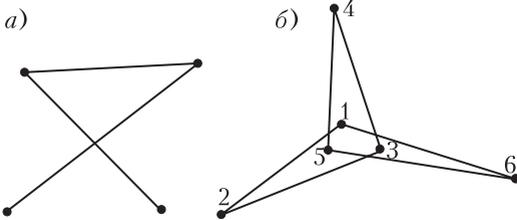


Рис. 7

Пример искомой ломаной из восьми звеньев читателю предлагается построить самостоятельно (см. задачи в конце статьи). А вот пример десятизвенной ломаной можно получить, обратившись к задаче 1. Действительно, рассмотрим пример замкнутой пятизвенной ломаной, которая каждое свое звено пересекает два раза (см. рис.4).

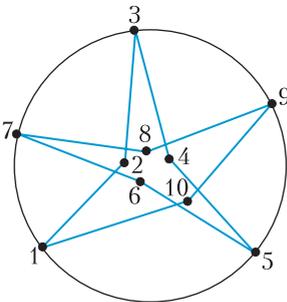


Рис. 8

«Сломаем» каждое звено между двумя точками пересечения и получим искомый пример (рис.8). Аналогично, рассмотрим семизвенную ломаную из задачи 1, можно получить решение для ломаной, у которой 14 звеньев; из примера восьмизвенной ломаной из задачи 1 получим решение для ломаной из 16 звеньев и т.д.

Этот прием не годится только для построения двенадцатизвенной ломаной, так как примера шестизвенной ломаной, которая каждое свое звено пересекает два раза, не существует. Но в этом случае можно использовать другую идею решения задачи 1: «раздвоение». Построим две ломаные

из рисунка 7,*б* с общей вершиной и «раздвоим» ее (рис.9; результат раздвоения – вершины с номерами 6 и 12). Понятно, что идея «раздвоения» вершин

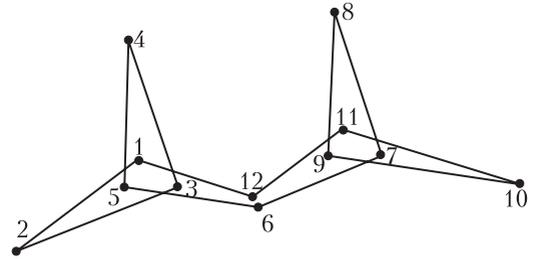


Рис. 9

более универсальна. В том числе и потому, что позволяет комбинировать ломаные с разным количеством звеньев.

Надеемся, что идеи и приемы, описанные выше, помогут при решении других задач.

Задачи для самостоятельного решения

1. Может ли прямая, не содержащая вершин замкнутой девятизвенной ломаной, пересечь каждое ее звено?

2 (В.Произволов). Замкнутая ломаная такая, что каждые два ее не соседних звена пересекаются. Докажите, что у этой ломаной нечетное количество звеньев.

3. Существует ли пятнадцатизвенная ломаная, пересекающая каждое свое звено ровно три раза?

4. Постройте восьмизвенную замкнутую ломаную, которая каждое свое звено пересекает один раз.

5 (Д.Калинин, вариация фольклора). Маша нарисовала замкнутую семизвенную ломаную. Для каждого звена она записала, со сколькими звеньями оно пересекается во внутренних точках. Могла ли она записать в каком-нибудь порядке числа 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1?

6. Какое наибольшее количество точек самопересечения может иметь замкнутая ломаная, в которой 7 звеньев?

7 (Н.Васильев). Рассматриваются всевозможные шестизвенные замкнутые ломаные, все вершины которых лежат на окружности.

а) Нарисуйте такую ломаную, которая имеет наибольшее возможное количество точек самопересечения.

б) Докажите, что большего количества самопересечений такая ломаная иметь не может.

Льем воду...

С. ДВОРЯНИНОВ

РАССМОТРИМ ТАКУЮ ТЕОРЕТИЧЕСКУЮ задачу.

Открытый сверху сосуд, имеющий форму параллелепипеда размером $a \times b \times h$, доверху наполнен водой. Сосуд равномерно и медленно поворачивают вокруг ребра b . В некоторый момент вода начинает вытекать. Объем вытекшей из сосуда воды зависит от угла поворота: $V = V(\alpha)$. При

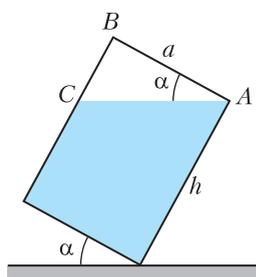


Рис. 1

каком значении α скорость изменения величины $V(\alpha)$, или расход воды, оказывается наибольшей? Какова эта скорость?

Сначала обсудим ситуацию, когда угол наклона сосуда α такой, что в сосуде осталось воды больше, чем вытекло (рис. 1). При этом объем вытекшей воды равен

$$V(\alpha) = S_{\Delta ABC} \cdot b = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot b = \\ = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \operatorname{tg} \alpha \cdot b = \frac{1}{2} a^2 b \operatorname{tg} \alpha.$$

Эта формула работает при $0 \leq \operatorname{tg} \alpha \leq \frac{h}{a}$, т.е. при $0 \leq \alpha \leq \operatorname{arctg} \frac{h}{a}$. Скорость изменения величины $V(\alpha)$ – производная этой функции:

$$V'(\alpha) = \frac{a^2 b}{2 \cos^2 \alpha}.$$

Функция $V'(\alpha)$ и определяет скорость вытекания воды при $0 \leq \alpha \leq \operatorname{arctg} \frac{h}{a}$. С увеличением угла α эта скорость растет, так как знаменатель дроби уменьшается.

Пусть теперь положение сосуда таково, что в нем осталось менее половины налитой

вначале воды (рис. 2). Так будет при

$$\operatorname{arctg} \frac{h}{a} \leq \alpha \leq 90^\circ$$

При этом удобно сначала найти объем оставшейся воды. Он равен

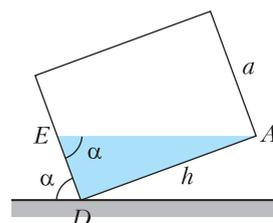


Рис. 2

$$V_{\text{ост}} = S_{\Delta ADE} \cdot b = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DE \cdot b = \\ = \frac{1}{2} \cdot h \cdot h \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) \cdot b = \frac{1}{2} h^2 b \operatorname{ctg} \alpha.$$

Стало быть, объем вытекшей воды равен

$$V(\alpha) = abh - \frac{1}{2} h^2 b \operatorname{ctg} \alpha.$$

Теперь производная, т.е. скорость вытекания воды, такова:

$$V'(\alpha) = \frac{h^2 b}{2 \sin^2 \alpha}.$$

Очевидно, что эта производная с увеличением угла α убывает, так как знаменатель дроби растет.

Итак,

$$V'(\alpha) = \begin{cases} \frac{a^2 b}{2 \cos^2 \alpha} & \text{при } 0 \leq \alpha \leq \operatorname{arctg} \frac{h}{a}, \\ \frac{h^2 b}{2 \sin^2 \alpha} & \text{при } \operatorname{arctg} \frac{h}{a} \leq \alpha \leq 90^\circ. \end{cases}$$

Это пример функции, которую иногда называют кусочной или кусочно заданной. Она задана двумя формулами на двух промежуточных изменениях аргумента. Заметим, что при $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{h}{a}$ по первой формуле

$$V'(\alpha) = \frac{a^2 b}{2 \frac{a^2}{a^2 + h^2}} = \frac{(a^2 + h^2) b}{2},$$

по второй формуле

$$V'(\alpha) = \frac{h^2 b}{2 \frac{h^2}{a^2 + h^2}} = \frac{(a^2 + h^2) b}{2}.$$

Совпадение двух значений означает, что функция $V'(\alpha)$ – непрерывная. Отсюда, в свою очередь, следует, что график функции $V(\alpha)$ – гладкая кривая, без изломов, имеющая касательную в каждой своей точке.

Обсудим частные случаи.

В самом начале нашего процесса выливания воды при $\alpha = 0$ скорость вытекания равна

$$V'(0) = \frac{a^2}{2} \cdot b,$$

в «середине», т.е. при $\alpha = \arctg \frac{h}{a}$, скорость вытекания оказывается наибольшей и равной

$$V' \left(\arctg \frac{h}{a} \right) = \frac{a^2 + h^2}{2} \cdot b,$$

в конце, при $\alpha = 90^\circ$, эта скорость равна

$$V' \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{h^2}{2} \cdot b.$$

Теперь рассмотрим практическую задачу, в решении которой может пригодиться рассмотренная выше математическая модель.

Строится дорога. Самосвал высыпает на будущее дорожное полотно песок, причём не в кучу, чтобы его потом разгребал грейдер. Желательно, чтобы при движении самосвала с постоянной скоростью песок высыпался равномерно. Каким должен быть угол наклона кузова к горизонту?

Будем считать, что кузов самосвала – это наш параллелепипед и что угол наклона кузова зависит от времени, т.е. $\alpha = \alpha(t)$. Тогда в момент времени t объем высыпавшегося песка равен

$$V(t) = \frac{1}{2} a^2 \cdot b \cdot \operatorname{tg} \alpha(t).$$

Песок высыпается со скоростью

$$V'(t) = \frac{a^2 b}{2 \cos^2 \alpha(t)} \cdot \alpha'(t).$$

Теперь мы должны выбрать такой закон изменения угла $\alpha(t)$, чтобы производная $V'(t)$ была постоянной. Так, очевидно, будет, если

$$\frac{\alpha'(t)}{\cos^2 \alpha(t)} = C,$$

где C – постоянная. Ясно, что закон управления углом наклона кузова оказывается непростым.

Формально, с математической точки зрения, задача решена. Как сильно надо наклонять кузов самосвала, мы установили. А вот с инженерной точки зрения это решение неудовлетворительно. Имеем такой простой

объект управления – кузов самосвала – и такой сложный закон управления...

Давайте попробуем применить «принцип сохранения» – усложним объект управления, но зато упростим алгоритм управления. Одно из возможных технических решений показано на рисунках 3 и 4. Пусть кузов

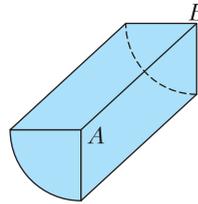


Рис. 3

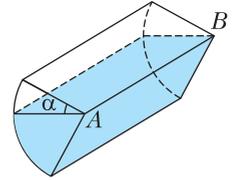


Рис. 4

самосвала – это четверть прямого кругового цилиндра. Если кузов поворачивать вокруг оси цилиндра с постоянной угловой скоростью, то расход песка будет постоянным. Все получается предельно просто: самосвал движется с постоянной скоростью, бункер наклоняется-поворачивается с постоянной скоростью и при этом его



БИБЛИО-ГЛОБУС
ВАШ ГЛАВНЫЙ КИЖНЫЙ

МЫ ПРЕДЛАГАЕМ
БОЛЬШОЙ ВЫБОР ТОВАРОВ И УСЛУГ

УСЛУГИ	АССОРТИМЕНТ
<ul style="list-style-type: none"> ■ Интернет-магазин www.bgshop.ru ■ Кафе ■ Клубные (дисконтные) карты и акции ■ Подарочные карты ■ Предварительные заказы на книги ■ Встречи с авторами ■ Читательские клубы по интересам ■ Индивидуальное обслуживание ■ Подарочная упаковка ■ Доставка книг из-за рубежа ■ Выставки-продажи 	<ul style="list-style-type: none"> ■ Книги ■ Аудиокниги ■ Антиквариат и предметы коллекционирования ■ Фильмы, музыка, игры, софт ■ Канцелярские и офисные товары ■ Цветы ■ Сувениры

г. Москва,
м. Лубянка,
м. Китай-город
ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1
8 (495) 781-19-00
www.biblio-globus.ru
пн – пт 9:00 - 22:00
сб – вс 10:00 - 21:00
без перерыва на обед

LX Международная математическая олимпиада

Юбилейная LX Международная математическая олимпиада прошла в июле 2019 года в университете города Бат, расположенного в графстве Сомерсет в юго-западной части Англии. Среди достопримечательностей Бата выделяются основанное в VII веке аббатство и термы – наследие Римской Британии. В часе езды от Бата находятся памятник еще более древний – загадочный Стоунхендж и город Солсбери, знаменитый своим собором. Все эти места с интересом посетили участники олимпиады в свободное от решения задач время.

В олимпиаде приняли участие 621 школьник из 112 стран мира – это очередной рекорд как по общему числу участников, так и по количеству участвующих стран.

В этом году нашу страну представляли выпускники школы *Олег Смирнов*, *Валерий Кулишов* (оба – Москва), *Владимир Петров* (Санкт-Петербург), а также десятиклассники *Иван Гайдай-Турлов* (Москва), *Алексей Львов* (Новосибирск), *Тимофей Ковалев* (Астрахань – Москва).

Наши ребята завоевали 2 золотые и 4 серебряные медали.

По традиции приводим таблицу с баллами по задачам участников нашей сборной (каждая задача оценивалась из 7 баллов) и результаты первых десяти стран в командном рейтинге. Полная информация о результатах на международных математических олимпиадах имеется на официальном сайте олимпиады www.imo-official.org.

В мероприятиях по подготовке команды были задействованы *А.Антропов*, *Б.Баев*, *И.Богданов*, *С.Берлов*, *В. Брагин*, *Н.Власова*, *А.Гаврилюк*, *Р.Газизуллина*, *А.Гайфуллин*, *А.Голованов*, *М.Григорьев*, *М.Дидин*, *М.Иванов*, *Д.Карпов*, *П.Кожевников*, *П.Козлов*, *А.Кузнецов*, *Д.Крачун*, *А.Кушнир*, *И.Митрофанов*, *Ф.Петров*,

М.Пратусевич, *К.Сухов* (руководил подготовкой), *И.Фролов*, *Г.Челноков*. Благодарим организации, оказавшие большую помощь в подготовке команды: Образовательный центр «Си-

Участник	Баллы по задачам						Сумма баллов	Награда
	1	2	3	4	5	6		
Олег Смирнов	7	7	5	7	7	2	35	Золотая медаль
Тимофей Ковалев	7	7	2	7	7	2	32	Золотая медаль
Владимир Петров	6	7	1	7	7	0	28	Серебряная медаль
Валерий Кулишов	7	6	1	7	7	0	28	Серебряная медаль
Иван Гайдай-Турлов	6	6	1	7	7	1	28	Серебряная медаль
Алексей Львов	6	7	7	0	7	1	28	Серебряная медаль

риус» (Сочи), Центр педагогического мастерства (Москва), Президентский физико-мате-

Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
		Золото	Серебро	Бронза
Китай	227	6	0	0
США	227	6	0	0
Южная Корея	226	6	0	0
КНДР	187	3	3	0
Таиланд	185	3	3	0
Россия	179	2	4	0
Вьетнам	177	2	4	0
Сингапур	174	2	4	0
Сербия	171	3	1	2
Польша	168	1	3	2

(Продолжение см. на с. 34)

...униженная механика была отделена от геометрии. Она стала одним из военных искусств.

Плутарх (об изобретениях Архимеда)

Под каким углом следует поставить ствол пушки, чтобы она стреляла как можно дальше?

Вопрос артиллериста к Никколо Тарталье

...успехи наполеоновских воинов обязаны... множеству инженеров, строивших мосты, дороги, фабрики оружия и всякого рода снабжения, пороховые, пушечные, снарядные заводы.

Алексей Крылов

Во второй мировой войне было три лучших оружия: английская пушка, немецкий самолет «Мессершмитт», советский танк Т-34.

Уинстон Черчилль

...похоже, что я был единственным, кто видел взрыв [атомной] бомбы ничем не защищенными глазами.

Ричард Фейнман

...я предложил альтернативный проект термоядерного заряда, совершенно отличный... по происходящим при взрыве физическим процессам и даже по источнику энерговыделения.

Андрей Сахаров

А так ли хорошо знакомы вам физика+техника?

Увы, известно, что одним из мощных катализаторов научно-технического прогресса во все времена служили военные конфликты. История создания самых разных видов ОРУЖИЯ свидетельствует о все большем включении, особенно в последние столетия, изобретателей, инженеров и ученых в разработку ружей и пушек, пулеметов и танков, истребителей и бомбардировщиков, крылатых и баллистических ракет, подводных лодок и авианосцев... Физика теснейшим образом оказалась переплетена с производством вооружения, апофеозом чего стало появление в XX веке атомной и водородной бомб.

Конечно, эта связь не могла не коснуться школы, о чем можно судить по названиям предметов – «гражданская оборона», «начальная военная подготовка» и, как же, любимые уроки по ОБЖ. Однако больше всего военной тематики отражено в курсе физики: нам было из чего выбирать сегодняшние сюжеты «Калейдоскопа».

Справедливости ради заметим, что множество изобретений и открытий в области обороны перекочевало в «гражданку» – и к этому мы еще вернемся в нашей рубрике.

Вопросы и задачи

1. Почему плохо стреляют и слишком туго и слишком слабо натянутые луки?

2. Пуля, вылетевшая из ружья, не может отворить дверь, но пробивает в ней отверстие, тогда как давлением пальца открыть дверь легко, но проделать отверстие невозможно. Как это объяснить?

3. Почему пуля пробивает в тонкостенном пустом стакане лишь два отверстия, а стакан, наполненный водой, при попадании пули разбивается вдребезги?

4. Для чего внутри ствола винтовок и пушек делают винтовые нарезки?

5. Какую максимальную скорость может приобрести пуля при выстреле? Какие требования следует предъявить к пороху, чтобы эта скорость была как можно больше?

6. Почему пуля, пущенная из ружья, производит свист, а брошенная рукой летит бесшумно?

7. Отчего порох, рассыпанный на столе, стораит почти бесшумно, а то же количество пороха при выстреле из ружья создает громкий звук?

8. Ствол пушки нагревается сильнее при холостом выстреле, чем при выстреле снарядом. Чем это объясняется?

9. Наибольшая теоретическая дальность стрельбы из орудия достигается при угле наклона ствола в 45° , практически же она может быть получена при больших углах. С чем это связано?



10. Почему сброшенные бомбы, мины и другие подобные снаряды падают на землю ударником вниз?

11. Отчего самолет-бомбардировщик вздрагивает, освобождаясь от груза подвешенных к его крыльям бомб?

12. Слышит ли военный летчик звук работы реактивного двигателя, если самолет летит со сверхзвуковой скоростью, а двигатель находится позади пилота?

13. Почему для локации летающих объектов выгоднее использовать электромагнитные, а не звуковые волны?

14. Одна из составляющих конструкции миноискателей – это генератор электромагнитных колебаний звуковой частоты. Индуктивность контура выполнена в нем в виде проволочного кольца. Когда оно приближается к мине, в телефонных наушниках высокий тон сменяется на низкий. Как это получается?

15. Ракета равномерно движется в далеком космосе, на ее сопло надели изогнутую трубу выходным отверстием в сторону движения и включили двигатели. Изменилась ли скорость ракеты?

16. Источником энергии Солнца являются термоядерные реакции синтеза легких элементов. Почему Солнце не взрывается подобно водородной бомбе, в которой используют аналогичные реакции?

Микроопыт

Давняя школьная забава – стрельба из трубочек комочками бумаги. Каков принцип действия этого «оружия»? (Надемся, что при испытаниях вы уже не будете направлять его на своих одноклассников!) Что с его помощью можно исследовать?

Любопытно, что...

...первым в письменной истории военнотехническим достижением является, видимо, изобретение кочевыми племенами гиксов боевых колесниц, позволивших им покорить в 18 веке до новой эры часть могучего Египета.

...при обороне Сиракуз искуснейший инженер Архимед строил катапульты, «стрелявшие» камнями массой под 80 килограммов на одну стадию (один стадий), т.е. на расстояние около 185 метров. Кстати, прин-

цип действия некоторых древних метательных орудий был положен в основу конструкции минометов, появившихся в первую мировую войну.

...головки ракет, снарядов и торпед естественно делать круглыми в поперечном сечении. Какой же именно должна быть форма самых этих тел вращения, чтобы испытывать наименьшее сопротивление среды при своем движении, выяснил, поставив и решив «аэродинамическую задачу», сам Ньютон.

...во время крупных военных сражений, включая наполеоновские войны и битвы обеих мировых войн, поля боев зачастую превращались в непролазную грязь из-за дождей. Дело в том, что частички пороха после выстрелов, поднимаясь вверх, служили центрами конденсации влаги, образуя достаточно крупные для выпадения дождя капли.

...в 1882 году изобретатель телефона Александр Белл создал портативный электромагнитный прибор для безболезненного поиска пуль и других металлических предметов в теле человека. Этот прибор долго и успешно применялся в клиниках, а впоследствии стал прообразом миноискателя.

...к созданию нового оружия, обладающего невиданной ранее разрушительной силой, привлекались многие ученые-физики, в том числе и будущие Нобелевские лауреаты. Так, в Манхэттенском проекте по созданию атомной бомбы участвовал Ричард Фейнман, а одним из «отцов» советской водородной бомбы стал Андрей Сахаров.

Что читать в «Кванте» по теме «Физика+техника» (оружие)

(публикации последних лет)

1. «Как воздух сопротивляется движению тела» – 2015, №1, с.35;
2. «Чуть-чуть физики для настоящего охотника» – 2015, Приложение №1, с.141;
3. «В тире и рядом» – 2016, №4, с.30;
4. «Как срочно доставить лекарство на воздушный шар» – 2017, №11, с.26;
5. «Как не быть мазилой» – 2018, №7, с.37;
6. «Человек-легенда XX века» – 2018, №9, с.14;
7. «Снаряд Тимофея» – 2018, №12, с.32;
8. «Симметрии в несимметричной вселенной Андрея Сахарова» – 2019, №7, с.2.

Материал подготовил А.Леонович





Слева направо: О.Смирнов, А.Львов, И.Гайдай-Турлов, Т.Ковалев, В.Кулишов, В.Петров. Фото Джессики Ванг (<https://facebook.com/jpwangphotography>)

(Начало см. на с. 31)

математический лицей № 239 (Санкт-Петербург), Международный детский центр «КОМПЬЮТЕРИЯ» (Тверская область), Математический институт РАН (Москва, Санкт-Петербург), РУДН.

Задачи олимпиады

1. Пусть \mathbb{Z} – множество всех целых чисел. Найдите все функции $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ такие, что для любых целых чисел a и b верно равенство

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b)).$$

Сальвадор

2. В треугольнике ABC точка A_1 лежит на отрезке BC , а точка B_1 лежит на отрезке AC . Пусть P и Q – точки на отрезках AA_1 и BB_1 соответственно такие, что прямая PQ параллельна AB . Точка P_1 , лежащая на прямой PB_1 , такова, что B_1 находится строго между P и P_1 , причем $\angle PP_1C = \angle BAC$. Аналогично, точка Q_1 лежащая на прямой QA_1 , такова, что A_1 находится строго между Q и Q_1 , причем $\angle CQ_1Q = \angle CBA$. Докажите, что точки P , Q , P_1 и Q_1 лежат на одной окружности.

Украина

3. В социальной сети 2019 пользователей. Некоторые пользователи дружат с некоторыми другими, при этом отношение дружбы взаимно, т.е. если пользователь A дружит с пользователем B , то B также дружит с A .

Перестройки следующего типа производятся последовательно, по одной перестройке за раз: выбираются три пользователя A , B и C таких, что A дружит и с B и с C , но B и C не дружат между собой; после чего B и C становятся друзьями, но A теперь не дружит ни с B , ни с C . Изначально 1010 пользователей имеют по 1009 друзей, а 1009 пользователей имеют по 1010 друзей. Докажите, что существует последовательность перестроек, после которой каждый пользователь будет иметь не более одного друга.

Хорватия

4. Найдите все пары (k, n) целых положительных чисел такие, что

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \dots (2^n - 2^{n-1}).$$

ЮАР

5. Банк города Бат выпускает монеты с буквой H на одной стороне и буквой T на другой стороне. Гарри разложил n таких монет в ряд слева направо. Он последовательно производит следующую операцию: если в ряду ровно $k > 0$ монет лежат буквой H кверху, то он переворачивает k -ю слева монету; иначе все монеты лежат буквой T кверху, и он останавливается. Например, если $n = 3$ и процесс начинается с конфигурации THT , то последовательность операций выглядит как

$$THT \rightarrow HHT \rightarrow HTT \rightarrow TTT$$

т.е. процесс остановится после трех операций.

а) Докажите, что при любой начальной конфигурации процесс остановится после конечного числа операций.

б) Для каждой начальной конфигурации S через $L(S)$ обозначим количество операций, после которых процесс остановится. Например, $L(THT) = 3$ и $L(TTT) = 0$. Найдите среднее арифметическое значений $L(S)$, когда S пробегает все 2^n возможных начальных конфигураций.

США

6. Пусть I – центр вписанной окружности остроугольного треугольника ABC , в котором $AB \neq AC$. Вписанная окружность ω треугольника ABC касается сторон BC , CA и AB в точках D , E и F соответственно. Прямая, проходящая через D и перпендикулярная EF , пересекает ω вторично в точке R . Прямая AR пересекает ω вторично в точке P . Окружности, описанные около тре-

угольников PCE и PBF , пересекаются вторично в точке Q . Докажите, что прямые DI и PQ пересекаются на прямой, проходящей через A и перпендикулярной AI .

Индия

Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов, М.Григорьев, П.Кожевников, Ф.Петров, М.Пратусевич, К.Сухов

Международная физическая олимпиада

В этом году Международная олимпиада по физике (МФО) проходила в Тель-Авиве (Израиль). В соревновании участвовали 364 школьника из 78 стран.

Сборную команду Российской Федерации представляли:

Григорий Бобков – Москва, школа 1589,

Алексей Шишкин – Москва, школа 1589,

Владимир Малиновский – Москва, школа 1589,

Андрей Панферов – Москва, СУНЦ МГУ,

Елисей Судаков – Вологда, Вологодский многопрофильный лицей.

Команду России возглавили сотрудники Московского физико-технического института (МФТИ) А.А.Воронов (руководитель команды), М.Н.Осин, В.А.Шевченко и Ф.М.Цыбров.

Отбор кандидатов начался за год до олимпиады, кандидатами в сборную стали 33 победителя и призера заключительного этапа Всероссийской олимпиады школьников по физике 10 класса. Подготовка и отбор проходили в течение года на базе МФТИ и образовательного центра «Сириус» (г.Сочи). На сборах с ребятами занимались преподаватели Лаборатории по работе с одаренными детьми МФТИ, где оттачивались навыки экспериментальной работы на сложном оборудовании. Также изучались сложные темы,

которые не входят в школьную программу по физике, но необходимы для участия в МФО. Сложившаяся за прошлые годы система подготовки включает в себя помимо учебных и отборочных сборов участие в международных олимпиадах. Возможность попробовать себя в «боевых» условиях олимпиады – важный этап психологической подготовки к важному соревнованию. Ребята участвовали в Международной экспериментальной олимпиаде по физике (IEPhO, ноябрь 2018 г.) и в Азиатской олимпиаде по физике (APhO, май 2019 г.). Азиатская олимпиада (Аделаида, Австралия) стала последним этапом отбора, по результатам которого были выбраны пять участников МФО.



Сборная команда России и ее руководители. Слева направо: В.А.Шевченко, М.Н.Осин, Е.Судаков, А.Панферов, В.Малиновский, А.Шишкин, Г.Бобков, А.А.Воронов, Ф.М.Цыбров

На олимпиаде в Тель-Авиве участникам были предложены три теоретические задачи и два экспериментальных задания. В отличие от тренда последних лет готовить задачи в том числе о современных, не школьных разделах физики, олимпиадный комитет этого года подготовил задачи исключительно по «классическим», хорошо известным школьникам разделам физики. Многие руководители команд отметили подборку задач этого года как один из лучших комплектов за последние несколько лет.

Максимальное количество баллов, которое мог набрать каждый школьник, равнялось 50. Члены сборной России показали следующие результаты:

Участник	Сумма баллов	Медаль
Бобков Григорий	39	Золотая
Шишкин Алексей	36,3	Золотая
Малиновский Владимир	32,6	Золотая
Панферов Андрей	30,2	Золотая
Судаков Елисей	24,1	Серебряная

В неофициальном командном зачете по сумме баллов команда России заняла второе место. Вот как распределились первые 10 мест:

№	Страна	Сумма баллов	№	Страна	Сумма баллов
1	Китай	191,2	6	Вьетнам	135,3
2	Россия	162,2	7	Израиль	122,6
3	Южная Корея	159,4	8	Таиланд	113,1
4	Индия	136,9	9	Гонконг	111,5
5	США	136,4	10	Сингапур	111,4

Ниже приводятся условия задач теоретического тура олимпиады.

Теоретический тур

Задача 1. Пружина нулевой длины и слинки

Пружина эффективной нулевой длины – ПНД – это пружина, у которой сила упругости пропорциональна длине пружины: $F = kL$ для $L > L_0$, где L_0 – минимальная длина (длина нерастянутой пружины). На рисунке 1 показана зависимость силы F от

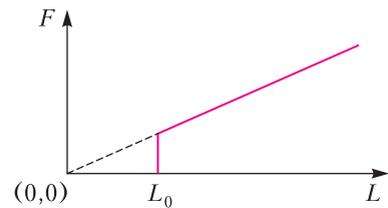


Рис. 1. Зависимость силы F от длины пружины L

длины L для ПНД, где наклон характеризует жесткость пружины k . ПНД используются в сейсмографии и позволяют очень точно измерять изменения в ускорении свободного падения g . Здесь и далее мы рассматриваем однородную ПНД, у которой сила тяжести Mg превышает kL_0 . Введем безразмерный коэффициент $\alpha = kL_0/(Mg) < 1$, характеризующий относительную жесткость пружины. Игрушка-пружинка «слинки» может являться примером такой ПНД (но не обязательно).

Часть А. Статика (3,0 балла)

А1. Рассмотрим кусочек нерастянутой ПНД длиной Δl . Пружину растянули силой F в условиях невесомости. Какова длина Δy этого кусочка в зависимости от F , Δl и параметров пружины? (0,5 балла)

А2. Для кусочка длиной Δl вычислите работу ΔW , необходимую для его растяжения от длины Δl до длины Δy . (0,5 балла)

Далее в этой задаче мы будем обозначать точки пружины с помощью расстояния l ($0 \leq l \leq L_0$), которое измеряется от нижней точки пружины, когда она не растянута. В частности, для каждой точки пружины значение l остается неизменным при растяжении пружины.

А3. Предположим, что мы удерживаем пружину за верхний конец так, что пружина растягивается под собственным весом. Определите полную длину H растянутой пружины в положении равновесия. Выразите ответ через L_0 и α . (2 балла)

Часть В. Динамика (5,5 баллов)

Проведем следующий эксперимент. Пружина подвешена за верхний конец и находится в покое. В некоторый момент пружину отпускают, и она начинает сжиматься, причем сжатие происходит постепенно, сверху вниз, и нижняя часть остается неподвижной (рис.2). С течением времени сжатая часть

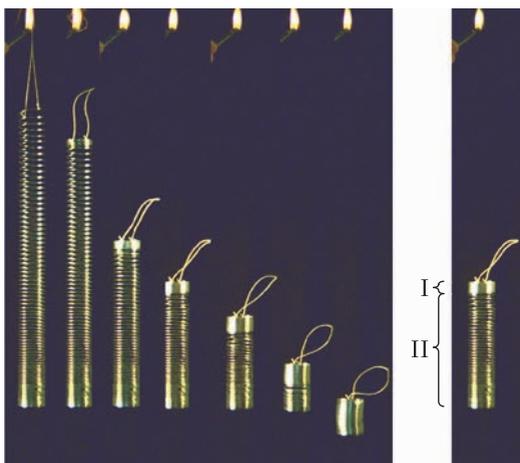


Рис. 2. Слева: последовательность кадров, сделанных в ходе падения пружинки. Справа: движущаяся часть I и неподвижная часть II при свободном падении пружины

движется, как твердое тело, и собирает остальные витки пружины, а неподвижная часть становится короче. Каждая точка пружины начинает движение только тогда, когда движущаяся часть достигнет этой точки. Нижний конец пружины начинает движение только тогда, когда пружина полностью сожмется и приобретет длину L_0 . После этого сжатая пружина падает, как твердое тело в поле тяжести.

В последующих частях задачи используйте описанную выше модель. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Пренебрегать L_0 нельзя.

В1. Найдите время t_c , которое пройдет с момента отпускания пружины до сжатия пружины до минимальной длины L_0 . Ответ выразите через L_0 , g и α . Посчитайте числовое значение t_c для пружины с параметрами $k = 1,02$ Н/м, $L_0 = 0,055$ м и $M = 0,201$ кг; считайте, что $g = 9,80$ м/с². (2,5 балла)

В2. В этой части l используется для обозначения конкретной точки пружины, а именно границы между частью I (см. рис.2; движущаяся часть) и частью II (неподвижная часть). В некоторый момент времени, пока существует неподвижная часть, ее масса равна $m(l) = \frac{l}{L_0} M$, а подвижная часть движется с мгновенной скоростью $v_1(l)$. Покажите, что для этого момента времени

(когда существует неподвижная часть) скорость движущейся части описывается выражением $v_1(l) = \sqrt{Al + B}$. Выразите константы A и B через L_0 , g и α . (2,5 балла)

В3. Используя пункт В2, найдите минимальную скорость v_{\min} движущейся части пружины в ходе движения: от момента отпускания до падения пружины на землю. Выразите ответ через L_0 , α , A и B . (0,5 балла)

Часть С. Энергетическая (1,5 балла)

С1. Найдите механическую энергию Q , которая перешла в тепло, начиная с момента отпускания пружины и до момента прямо перед касанием пружины о землю. Выразите ответ через L_0 , M , g и α . (1,5 балла)

Задача 2. Физика в микроволновке

В задаче обсуждается получение микроволнового излучения в микроволновке и то, как оно используется для нагревания еды. Микроволновое излучение создается магнетроном. В части А обсуждается работа магнетрона, а в части В – поглощение микроволнового излучения при нагревании еды.

Часть А. Структура и принцип работы магнетрона (6,6 балла)

Магнетрон – это устройство для создания микроволнового излучения (в импульсном или непрерывном режиме). У магнетрона есть мода самовозбуждающихся колебаний. Если на магнетрон подать постоянное (не переменное) напряжение, то эта мода возбуждается очень быстро.

Магнетрон в микроволновке представляет собой медный цилиндрический катод (радиусом a) и окружающий его анод (радиусом b). Анод – это толстый цилиндрический слой, в котором просверлены цилиндрические полости. Эти полости называются резонаторами. Один из резонаторов соединен с антенной, с помощью которой излучение испускается (в задаче антенной можно пренебречь). Считайте, что магнетрон находится в вакууме. В задаче рассматривается магнетрон с 8 (восемью) резонаторами. Он изображен на рисунке 3,а. На рисунке 3,б показано, что каждая из восьми полостей ведет себя как LC-резонатор с частотой $f = 2,45$ ГГц.

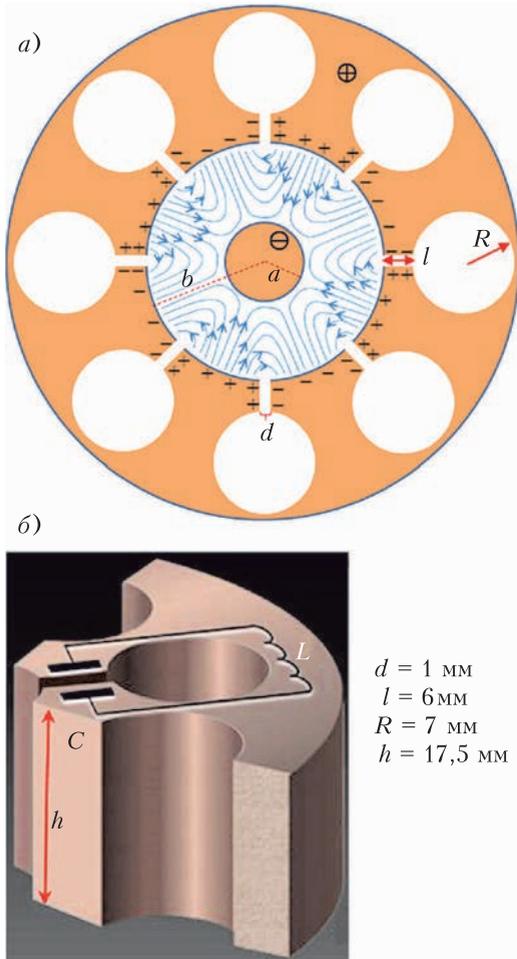


Рис. 3. Магнетрон с восемью резонаторами

Магнетрон находится в постоянном однородном магнитном поле, направленном по его оси. Постоянное напряжение приложено между анодом (положительный потенциал) и катодом (отрицательный потенциал). Электроны, вылетевшие с катода, достигают анода и заряжают его. В результате возбуждается мода колебаний, в которой знаки зарядов любых соседних резонаторов противоположны. За счет полостей эти колебания усиливаются. В результате между катодом и анодом (вдобавок к постоянному полю) создается переменное электрическое поле с частотой $f = 2,45$ ГГц (синие линии на рисунке 3,а; постоянное поле не показано). В стационарном режиме амплитуда колебаний напряженности переменного электрического поля составляет около $1/3$ напря-

женности постоянного поля. На движение электронов влияют обе составляющие электрического поля. В процессе движения электроны приобретают некоторую энергию от постоянного поля. Электроны, достигающие анода, передают переменному полю около 80% энергии, полученной при ускорении в постоянном поле. Небольшая часть вылетевших электронов возвращаются на катод и выбивают новые.

Каждый резонатор можно рассматривать как конденсатор и катушку. Емкость имеют плоские части поверхности резонатора, индуктивность – цилиндрические части (см. рис.3,б). Считайте, что ток в резонаторе течет очень близко к поверхности цилиндрической полости, а создаваемое им магнитное поле составляет 0,6 поля идеального бесконечного соленоида. Геометрические размеры резонатора приведены на рисунке 3,б. Физические постоянные $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м и $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м считайте заданными.

A1. Рассчитайте частоту одиночного резонатора f_1 по параметрам, заданным выше. (Ваш ответ может отличаться от реального значения $f = 2,45$ ГГц. Дальше в задаче используйте только *реальное* значение частоты.) (0,4 балла)

В пункте A2 обсуждаются вспомогательные аспекты движения электрона (не в магнетроне). Рассмотрим электрон, который движется в однородном электрическом поле, направленном против оси y , т.е. $\vec{E} = -E_0 \hat{y}$, и однородном магнитном поле, направленном вдоль оси z , т.е. $\vec{B} = B_0 \hat{z}$. Здесь E_0 и B_0 – положительные постоянные, \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} – единичные орты правой координатной системы. Скорость электрона в момент времени t обозначим $\vec{u}(t)$. Скорость дрейфа \vec{u}_d электрона – это его средняя скорость движения. Обозначим m – массу электрона, e – его заряд.

A2. Найдите \vec{u}_d для двух случаев, описанных ниже. Нарисуйте на листе ответов траектории движения электронов (в лабораторной системе отсчета) в течение интервала времени $0 < t < \frac{4\pi m}{eB_0}$, если: 1) в момент времени $t = 0$ скорость электрона равна $\vec{u}(0) = (3E_0/B_0)\hat{x}$; 2) в момент времени $t = 0$ скорость электрона равна $\vec{u}(0) = -(3E_0/B_0)\hat{x}$. (1,5 балла)

Вернемся теперь к обсуждению магнетрона. Расстояние между катодом и анодом 15 мм. Пусть также из-за описанных ранее потерь энергии максимальная кинетическая энергия электрона не превышает $K_{\max} = 800$ эВ. Индукция постоянного магнитного поля $B_0 = 0,3$ Тл. Масса и заряд электрона равны $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг и $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл соответственно.

A3. Рассмотрим электрон в системе отсчета, в которой его движение можно считать почти движением по окружности. Оцените численно максимальный радиус r этой окружности. Систему отсчета считать инерциальной. (0,4 балла)

A4. На рисунке 4 изображены силовые линии переменного электрического поля

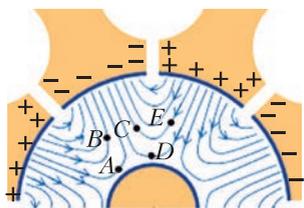


Рис. 4. Пять электронов в переменном электрическом поле

между анодом и катодом в некоторый момент времени (силовые линии постоянного поля не показаны). Положения пяти электронов в этот момент времени обозначены A, B, C, D и E . Укажите в листе ответов, какие из этих электронов дрейфуют в сторону анода, какие в сторону катода, а какие дрейфуют в направлении, перпендикулярном радиусу в этот момент времени. (1,2 балла)

На рисунке 5 изображены силовые линии переменного электрического поля между анодом и катодом в некоторый момент времени

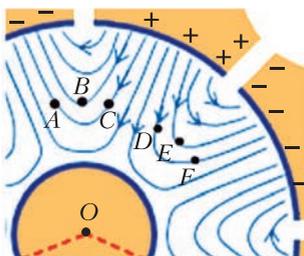


Рис. 5. Шесть электронов на одинаковом расстоянии от катода

ни (силовые линии постоянного поля не показаны). Положения шести электронов в этот момент времени обозначены A, B, C, D, E и F . Все электроны расположены на одинаковом расстоянии от катода.

A5. Рассмотрим пары электронов AB, AC, BC, DE, DF, EF (см. рис.5). Для каждой из пар укажите, как будет влиять дрейф на угол между векторами, направленными из точки O (центр катода) к точке, где находится электрон. Будет ли угол увеличиваться или уменьшаться в этот момент времени? (1,2 балла)

Поведение системы, которое вы обнаружили в пункте A5, это механизм фокусировки. Электроны концентрируются в пространстве между катодом и анодом в сгустки. Такие сгустки называются «спицами». Одна из спиц показана на рисунке 6 и обозначена S .

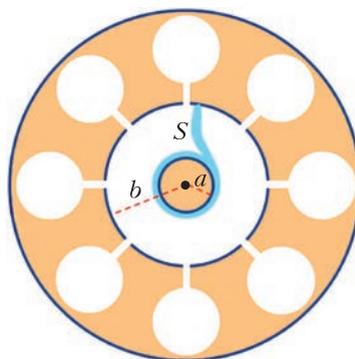


Рис. 6. Фокусировка электронов

A6. Нарисуйте на листе ответов остальные спицы в этот момент времени. Стрелками укажите направление их вращения. Вычислите их угловую скорость ω . (0,8 балла)

Пусть полная напряженность электрического поля на середине расстояния между анодом и катодом равна среднему значению напряженности постоянного поля, измеренной вдоль радиуса. Считайте, что спицы направлены радиально. Радиусы анода и катода равны b и a соответственно (см. рис.6).

A7. Оцените, какое постоянное напряжение U_0 нужно, чтобы магнетрон работал в режиме, описанном в этой части задачи. (Найденное выражение будет соответствовать минимальному значению напряжения;

оптимальное напряжение несколько выше.) (1,1 балла)

Часть В. Взаимодействие микроволнового излучения с молекулами воды (3,4 балла)

В этой части задачи обсуждается нагрев еды с помощью микроволнового излучения. Электрический диполь представляет собой два одинаковых по модулю и противоположных по знаку заряда q и $-q$, расположенных на небольшом расстоянии d друг от друга. Вектор дипольного момента направлен от отрицательного заряда к положительному, а его модуль равен $p = qd$. Пусть одиночный диполь $\vec{p}(t)$ помещен в переменное электрическое поле $\vec{E}(t) = E(t)\hat{x}$. Модуль дипольного момента постоянен, т.е. $p_0 = |\vec{p}(t)|$. Угол между векторами дипольного момента и напряженности поля равен $\theta(t)$.

В1. Найдите модуль момента сил $\tau(t)$, действующих на диполь со стороны поля. Найдите мгновенную мощность $H_i(t)$, сообщаемую диполю. Ответы выразите через p_0 , $E(t)$, $\theta(t)$ и их производные. (0,5 балла)

Молекулы воды можно представить электрическими диполями. Из-за сильных водородных связей между молекулами воды в жидкости нельзя считать воду совокупностью независимых диполей. Таким образом, необходимо использовать вектор поляризации $\vec{P}(t)$, который равен среднему дипольному моменту единицы объема вещества. Вектор поляризации $\vec{P}(t)$ направлен параллельно вектору напряженности локально приложенного переменного электрического поля (излучения) $\vec{E}(t)$. Также он осциллирует во времени с амплитудой, пропорциональной амплитуде напряженности этого электрического поля, но с фазовым сдвигом δ . Локальное электрическое поле в некоторой точке нагреваемой воды равно $\vec{E}(t) = E_0 \sin \omega t \cdot \hat{x}$, где $\omega = 2\pi f$, поляризация воды равна $\vec{P}(t) = \beta \epsilon_0 E_0 \sin(\omega t - \delta) \cdot \hat{x}$, где безразмерная постоянная β определяется свойствами воды.

В2. Найдите усредненную по времени мощность $\langle H(t) \rangle$, поглощаемую единицей объема воды. Усреднение по времени периоди-

ческой величины $f(t)$ за период T определяется как $\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$. (0,5 балла)

Рассмотрим распространение излучения сквозь воду. Диэлектрическая проницаемость воды (в обсуждаемых диапазонах частот) равна ϵ_r , соответствующий показатель преломления воды равен $n = \sqrt{\epsilon_r}$. Мгновенная плотность энергии электрического поля равна $\frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2$. Усредненные по времени плотности энергии электрического и магнитного поля равны.

В3. Обозначим усредненную по времени плотность потока энергии излучения $I(z)$ (средняя мощность излучения, проходящая через единицу площади). Здесь z – это глубина проникновения излучения в воду (излучение распространяется вдоль оси z). Найдите зависимость $I(z)$. В вашем ответе может фигурировать плотность потока энергии на поверхности воды $I(0)$. (1,1 балла)

Фазовый сдвиг δ обусловлен взаимодействием между молекулами воды. Он зависит от безразмерных величин ϵ_l (характеризует диссипацию) и ϵ_r (диэлектрическая проницаемость). Обе величины зависят от частоты излучения ω и температуры. Формула для фазового сдвига: $\text{tg } \delta = \epsilon_l / \epsilon_r$. Когда δ достаточно мал, электрическое поле на глубине z рассчитывается следующим образом: $\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{1}{2} n k_0 z \text{tg } \delta} \sin(n k_0 z - \omega t)$, где $k_0 = \omega / c$, $c = 3,0 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме.

В4. В приближении $\text{tg } \delta \approx \sin \delta$ найдите значение коэффициента β . Ответ выразите через заданные выше величины. (0,6 балла)

На рисунке 7 изображены зависимости ϵ_l (синие линии) и ϵ_r (красные линии) для чистой (сплошные линии) и соленой (пунктирные линии) воды от частоты при разных температурах. Обсуждаемая в задаче угловая частота $\omega = 2\pi \cdot 2,45 \cdot 10^9$ 1/с отмечена жирной черной вертикальной линией. Далее мы рассматриваем излучение только на этой частоте.

В5. По данным рисунка 7 ответьте на следующие вопросы: (0,7 балла)

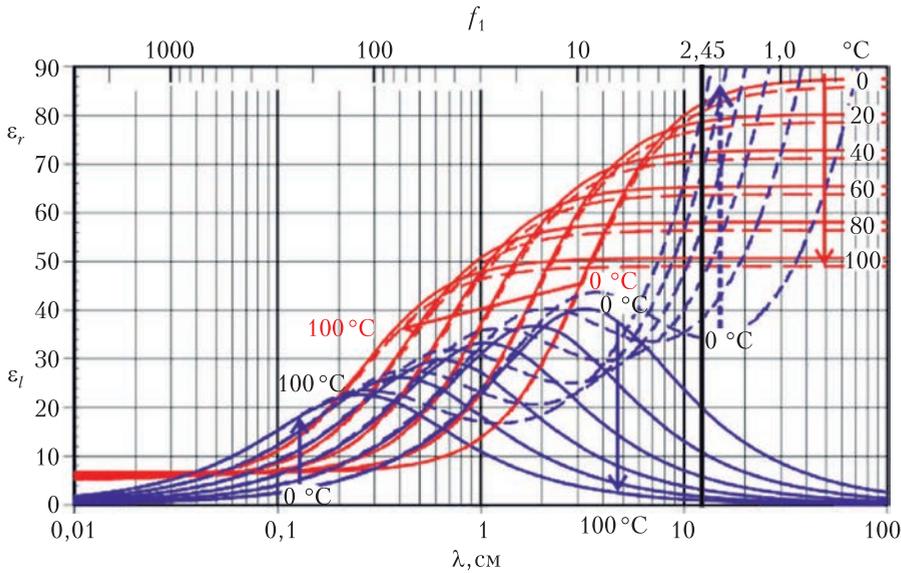


Рис. 7. Зависимость величин, характеризующих фазовый сдвиг, от частоты при разных температурах

1) Найдите глубину проникновения $z_{1/2}$ в воду при температуре 20°C . Под глубиной проникновения здесь понимается такое расстояние, на котором мощность излучения в единице объема уменьшается в два раза по сравнению с ее значением при $z = 0$.

2) Укажите в листе ответов, как меняется глубина проникновения микроволнового излучения в воде при изменении температуры. Она увеличивается, уменьшается или не изменяется при увеличении температуры?

3) Укажите в листе ответов, как меняется глубина проникновения микроволнового излучения в соленой воде при изменении температуры. Она увеличивается, уменьшается или не изменяется при увеличении температуры?

Задача 3. Термоакустический двигатель

Термоакустический двигатель превращает тепловую энергию в акустическую, или в звуковые волны – один из видов механической энергии. Как и другие тепловые двигатели, он может работать в обратном режиме, став холодильной машиной, т.е. с помощью звука передавать тепло от холодного тела к горячему. Так как двигатель функционирует на высокой частоте, теплопередача уменьшается, также двигателю не требуется изоляция рабочей камеры. В отличие от других двигателей, термоакустический двигатель не имеет

движущихся частей, кроме рабочего потока. КПД термоакустического двигателя обычно ниже, чем у других двигателей, но он обладает рядом преимуществ при сборке, отладке и обслуживании. В этой задаче мы рассмотрим генерацию звуковой энергии в системе.

Часть А. Звуковая волна в закрытой трубе (3,7 балла)

Рассмотрим теплоизолированную трубу длиной L и площадью поперечного сечения S . Ось трубы совпадает с осью x . Координаты концов трубы $x = 0$ и $x = L$. Труба заполнена идеальным газом и закрыта с обоих концов. В равновесии температура газа T_0 , давление p_0 и плотность ρ_0 . Предполагается, что вязкость отсутствует, а движение газа происходит только вдоль горизонтальной оси x . Свойства газа однородны в перпендикулярных направлениях y и z .

A1. Если образуется стоячая волна, порция газа колеблется в направлении x с циклической частотой ω . Амплитуда колебаний зависит от положения равновесия x каждой порции вдоль трубы. Продольное смещение u каждой порции газа от ее положения в состоянии покоя x задается формулой $u(x, t) = a \sin kx \cos \omega t = u_1(x) \cos \omega t$ (заметьте, что u описывает смещение рассматриваемой порции газа). Здесь $a \ll L$ – положительная постоянная, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое

число и λ – длина волны. Чему равна максимально возможная длина волны λ_{\max} в такой системе? (0,3 балла)

Далее в этой задаче обсуждается мода колебаний, соответствующая длине волны $\lambda = \lambda_{\max}$. Рассмотрим порцию газа, находящуюся в состоянии покоя между x и $x + \Delta x$ ($\Delta x \ll L$). В результате волны смещения из задания А1 порция газа колеблется вдоль оси x . При этом изменяются ее объем и другие термодинамические характеристики. Далее во всех пунктах считайте, что все рассматриваемые изменения характеристик малы по сравнению с невозмущенными значениями.

А2. Объем порции газа $V(x, t)$ колеблется около равновесного значения $V_0 = S\Delta x$ согласно формуле $V(x, t) = V_0 + V_1(x) \cos \omega t$. Получите выражение для $V_1(x)$, выразив его через V_0 , a , k и x . (0,5 балла)

А3. Считайте, что зависимость давления газа из-за звуковой волны имеет приближенный вид $p(x, t) = p_0 - p_1(x) \cos \omega t$. Рассматривая силы, действующие на порцию газа, вычислите амплитуду $p_1(x)$ колебаний давления (первый порядок малости), выразив ее через координату x , равновесную плотность ρ_0 , амплитуду смещения a и параметры волны k и ω . (0,7 балла)

При звуковых частотах теплопроводностью газа можно пренебречь. Будем считать процессы расширения и сжатия газа адиабатическими, т.е. выполняется уравнение $pV^\gamma = \text{const}$, где γ – показатель адиабаты.

А4. Используйте приведенное выше соотношение и результаты предыдущих пунктов, чтобы получить выражение для скорости звуковых волн $c = \omega/k$ (в первом порядке малости). Выразите свой ответ через параметры равновесного состояния газа p_0 , ρ_0 и показатель адиабаты γ . (0,3 балла)

А5. Изменение температуры газа в процессах адиабатического расширения и сжатия в результате воздействия звуковой волны имеет вид $T(x, t) = T_0 - T_1(x) \cos \omega t$. Вычислите амплитуду $T_1(x)$ колебаний температуры, выразив ее через T_0 , γ , a , k и x . (0,7 балла)

А6. Только в этом пункте рассмотрим слабое тепловое взаимодействие между трубой и газом. Таким образом, стоячая волна остается неизменной, но газ может обмени-

ваться небольшим количеством тепла с трубой. Нагревом, обусловленным вязкостью, можно пренебречь. Для каждой точки A , C на концах трубы и точки B посередине укажите, будет ли температура указанных точек трубы увеличиваться, уменьшаться или не будет изменяться в течение длительного времени. (1,2 балла)

Часть В. Усиление звуковой волны, вызванное внешним тепловым контактом (6,3 балла)

Стопка тонких твердых пластин установлена внутри трубы (рис.8). Пластины в стопке расположены параллельно оси трубы

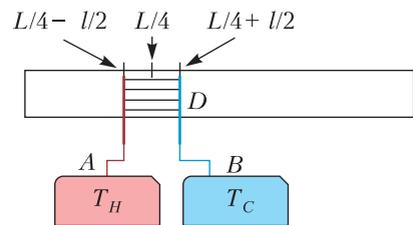


Рис. 8. Схема системы: A и B обозначают горячий и холодный резервуары тепла соответственно, D – стопка пластин

на расстоянии друг от друга так, что они не мешают потоку газа вдоль трубы. Середина стопки находится на $x_0 = L/4$, ширина стопки $l \ll L$ вдоль оси трубы; стопка заполняет полностью сечение трубы. Левый край стопки находится на $x_H = x_0 - l/2$. С помощью внешнего теплового резервуара его температура поддерживается равной $T_H = T_0 + \tau/2$. В то же время правый край стопки находится на $x_C = x_0 + l/2$ и его температура поддерживается равной $T_C = T_0 - \tau/2$. Таким образом, между концами пластин поддерживается постоянная разница температур τ . Стопка пластин обеспечивает продольный градиент температуры так, что $T_{\text{пл}}(x) = T_0 - \frac{x - x_0}{l} \tau$. Для анализа влияния теплового контакта между стопкой пластин и газом на звуковые волны в трубе предположим следующее:

- Все изменения термодинамических величин малы по сравнению с невозмущенными величинами.

- Система работает на основной моде стоячей волны при максимально возможной

длине волны. Она очень слабо изменяется из-за наличия стопки пластин.

• Стопка пластин значительно короче длины волны, $l \ll \lambda_{\max}$, и может быть расположена достаточно далеко от узлов (нулей) смещения и давления, так что смещение $u(x, t) \approx u(x_0, t)$ и давление $p(x, t) \approx p(x_0, t)$ могут считаться постоянными по всей длине стопки.

• Краевыми эффектами, обусловленными входящими в стопку пластин порциями газа и выходящими из нее, можно пренебречь.

• Разница температур между краями стопки пластин, т.е. между горячим и холодным резервуарами, мала по сравнению с абсолютной температурой, $\tau \ll T_0$.

• Теплопроводностью газа, стопки пластин и трубы можно пренебречь. Основными процессами теплопередачи являются конвекция (из-за движения газа) и теплопередача между газом и стопкой пластин.

В1. Рассмотрим конкретную порцию газа, первоначально расположенную в $x_0 = L/4$. В процессе движения порции газа внутри стопки пластин температура ближайшего к нему участка стопки пластин изменяется следующим образом: $T_{\text{вн}}(t) = T_0 - T_{\text{ст}} \cos \omega t$. Выразите $T_{\text{ст}}$ через a , τ и l . (0,4 балла)

В2. Выше определенной критической разницы температур $\tau_{\text{кр}}$ газ будет передавать тепло от горячего резервуара к холодному. Выразите $\tau_{\text{кр}}$ через T_0 , γ , k и l . (1 балл)

В3. Получите общее приближенное выражение для потока тепла $\frac{dQ}{dt}$ в малую порцию газа как линейную функцию скоростей изменения ее объема и давления. Выразите свой ответ через скорость изменения объема $\frac{dV}{dt}$, скорость изменения давления $\frac{dp}{dt}$, невозмущенные равновесные значения давления и объема порции газа p_0 , V_0 и показатель адиабаты γ . (Вы можете использовать выражение для молярной теплоемкости при постоянном объеме $C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$, где R – газовая постоянная.) (0,8 балла)

Ограниченный тепловой поток между порцией газа и стопкой пластин ведет к сдвигу фаз между колебаниями давления и объема порции газа. Это приводит к появлению работы. Пусть поток тепла от стопки пластин

к порции газа пропорционален разнице температур между расположенным рядом элементом стопки пластин и порцией газа.

Приближенно можно записать $\frac{dQ}{dt} = -\beta V_0 (T_{\text{ст}} - T_1) \cos \omega t$, где T_1 и $T_{\text{ст}}$ – амплитуды колебаний температуры порции газа и расположенной рядом стопки пластин из пунктов А5 и В1 соответственно; $\beta > 0$ – некоторая постоянная. Считайте, что при рабочих частотах двигателя изменение температуры газа в результате этого теплового потока несущественно по сравнению как с T_1 , так и с $T_{\text{ст}}$.

В4. Для вычисления работы рассмотрим изменение объема движущейся порции газа в результате теплового контакта со стопкой пластин. Запишем давление и объем порции газа в виде $p = p_0 + p_a \sin \omega t - p_b \cos \omega t$, $V = V_0 + V_a \sin \omega t + V_b \cos \omega t$. При заданных p_a и p_b найдите коэффициенты V_a и V_b . Выразите свой ответ через p_a , p_b , p_0 , V_0 , γ , τ , $\tau_{\text{кр}}$, β , ω , a и l . (1,9 балла)

В5. Получите выражение для акустической работы, отнесенной к единице объема, произведенной порцией газа за один цикл. Найдите полную работу $W_{\text{пол}}$, совершенную газом за один цикл. Выразите $W_{\text{пол}}$ через γ , τ , $\tau_{\text{кр}}$, β , ω , a , k и S . (0,8 балла)

В6. Получите выражение для количества теплоты $Q_{\text{пол}}$, переданного за цикл через плоскость $x = x_0$ слева направо. Выразите свой ответ через τ , $\tau_{\text{кр}}$, β , ω , a , S , l . (Подсказка. Для потока тепла при конвекции можно было бы использовать формулу $j = Q \frac{du}{dt}$.) (0,8 балла)

В7. Определите КПД η термоакустического двигателя. КПД определяется как отношение произведенной акустической работы к количеству теплоты, полученному из резервуара. Выразите свой ответ через разницу температур τ между горячим и холодным резервуарами, критическую разность температур $\tau_{\text{кр}}$ и КПД цикла Карно $\eta_{\text{К}} = 1 - T_C/T_H$. (0,6 балла)

Публикацию подготовили Ф.Цыбров, А.Воронов, М.Осин, В.Шевченко

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Политехническая олимпиада школьников

Политехническая олимпиада школьников в 2018/19 учебном году проводилась по четырем предметам: математике, физике, химии и информатике. Отборочный тур проходил заочно с применением интернет-технологий. Участники выполняли задания тура на официальном сайте олимпиады. Победители и призеры отборочного тура были приглашены к участию в заключительном туре, который прошел в Санкт-Петербургском политехническом университете в форме очного письменного испытания.

Информацию об олимпиаде 2019/20 учебного года можно получить на сайтах СПбПУ: www.spbstu.ru и olymp.spbstu.ru

МАТЕМАТИКА

Отборочный тур

1. Решите уравнение

$$\sqrt{3-2x} - \sqrt{-x-1} = \sqrt{4-x}.$$

2. Решите неравенство

$$(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x^2 - 9x + 18} \leq 0.$$

В ответе укажите сумму наименьшего и наибольшего положительных решений.

3. Найдите центр симметрии графика функции $y = \frac{x^2 - 5x + 3}{x - 1}$. В ответе укажите сумму координат этой точки.

4. В четырех ящиках лежат телефонные аппараты, причем в разных ящиках разное количество аппаратов. Сколько телефонов в каждом ящике, если их общее количество равно 28, а самое большое число телефонов в ящике в два раза больше самого маленького количества?

5. Найдите все значения a , при которых произведение корней уравнения $x^2 - (2a + 5)x + a^2 + 3a = 0$ равно 4.

6. Найдите количество решений неравенства $2|\sin 3x \cos 6x| + \sin 3x \sin 9x \leq 0$ на промежутке $[0; \pi]$.

7. Дан квадрат со стороной $\sqrt{20}$. За пределами квадрата взята точка, расстояния от которой до двух смежных вершин квадрата равны $\sqrt{2}$ и $3\sqrt{2}$ соответственно. Найдите расстояние от этой точки до центра квадрата.

8. Из емкости, содержащей 100 л 40%-го раствора кислоты отлили 20 л и заменили водой, затем отлили 20 л нового раствора и заменили тем же количеством 40%-го раствора. Найдите окончательную концентрацию. Ответ округлите до ближайшего целого. Знак % не пишите.

9. Две работницы на двух компьютерах могут подготовить оригинал-макет книги за 16 часов. Если же при наличии одного компьютера каждая выполнит половину работы, то потребуются 50 часов. За какое время может справиться с заданием одна работница с большей производительностью?

10. Найдите отношение суммы катетов прямоугольного треугольника к его площади, если длина биссектрисы прямого угла равна $1/\sqrt{2}$.

Заключительный тур

1. Найдите остаток от деления $3^{105} + 5^{100}$ на 26.

2. Первый и второй работники, работая одновременно, могут выполнить задание за 20 часов, второй и третий – за 12 часов, первый и третий – за 15 часов. За какое время они выполняют работу втроем?

3. Решите уравнение

$$x = (\sqrt{2x+1} - 2)(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}).$$

4. Числа $a, 2, b$ – последовательные члены арифметической прогрессии. Найдите сумму коэффициентов многочлена $(a + 2x + bx^2)^3$.

5. Найдите сумму кубов всех вещественных корней уравнения $x^3 - 8x + 6 = 0$.

6. В канистре находится раствор кислоты. Если долить в канистру 10 литров воды, то концентрация кислоты станет равной 25%, если добавить еще 5 литров воды, то концентрация снизится до 20%. Какова была изначальная концентрация кислоты?

7. Имеется набор предметов, каждый из которых имеет массу не более 1 кг. Общая масса предметов – 50 кг. Нужно уложить эти предметы в коробки так, чтобы масса каждой коробки была не более 5 кг. Каким наименьшим числом коробок можно гарантированно обойтись?

8. Равнобедренная трапеция описана около окружности радиуса 3. Отношение длин одного из оснований и боковой стороны равно $8/5$. Найдите меньшее основание трапеции.

9. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ углы между сторонами AB, AD, AA_1 равны, длина каждой из этих сторон равна 2. Найдите полную поверхность параллелепипеда,

если $|AC_1| = \sqrt{\frac{15}{7}} |BD_1|$.

10. Найдите все значения a , при которых уравнение $ax + 1 = \min\{|x|; 1/|x|\}$ имеет ровно два решения.

ФИЗИКА

Отборочный тур

Каждая задача оценивалась в 10 баллов.

1. Лыжник, совершая лесную пробежку, полчаса двигался ровным шагом со скоростью $v_1 = 10$ км/ч, после чего начался затяжной подъем длиной $s_2 = 900$ м, во время которого скорость равномерно уменьшалась и стала равна нулю в верхней точке подъема. Лыжник во время подъема очень устал и решил посидеть на пеньке и $t_3 = 20$ мин передохнуть, после чего, куда не торопясь, прошел оставшиеся $s_4 = 1,8$ км пути со скоростью $v_4 = 2,1$ км/ч. Определить среднюю скорость лыжника за время такой прогулки.

2. Со снежного склона горы мальчик запустил снежок вверх перпендикулярно плоскости склона. Начальная скорость снежка $v_0 = 12$ м/с. Угол наклона склона $\alpha = 26^\circ$. Найдите радиус кривизны траектории снеж-

ка в момент его максимального удаления от склона. Силами сопротивления пренебречь.

3. Дети катаются на санках. Андрей тащит санки с Машей за веревку под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, а Петя толкает такие же санки с Дашей, направляя силу $F = 140$ Н вниз под углом 30° к горизонту. Какую силу должен прикладывать Андрей, чтобы девочки двигались с одинаковым ускорением? Масса Маши вместе с санками $m_1 = 37$ кг, масса Даши вместе с санками $m_2 = 33$ кг. Коэффициент трения $\mu = 0,16$.

4. Какой минимальной силой можно опрокинуть однородный прямоугольный параллелепипед массой $m = 980$ кг с основанием в форме квадрата со стороной $b = 0,8$ м и высотой $h = 1,3$ м через ребро (рис. 1)? Коэффициент трения между горизонтальной поверхностью и параллелепипедом таков, что скольжения не происходит.

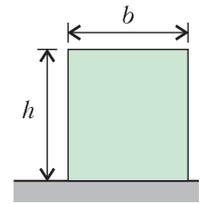


Рис. 1

5. Понтонный мост через реку состоит из $N = 25$ сегментов, представленных на рисунке 2. Каждый сегмент включает в себя две

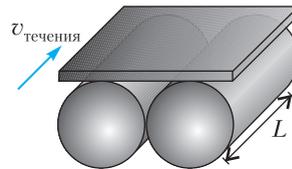


Рис. 2

пустотелые бочки в форме цилиндра длиной $L = 4,6$ м. Найдите ширину реки, если мост погружен в воду на половину своего объема, а масса каждого сегмента $m = 1900$ кг. Плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м³. Размерами и массой связующих элементов моста пренебречь. Считать, что течение реки направлено вдоль оси цилиндров, из которых состоит понтон.

6. Космический исследовательский корабль вышел на стационарную орбиту неизвестной планеты Квит. Ученые, высадившись на планету, обнаружили, что тела на экваторе весят в $n = 3,6$ раза меньше, чем на ее полюсе. Считая форму планеты шарообразной, определите высоту корабля на стационарной орбите, если радиус планеты $R = 10^4$ км. Стационарной орбитой называется круговая

орбита, двигаясь по которой корабль будет находиться над одной и той же точкой экватора.

7. Разбился старый ртутный термометр. Капельки ртути «бегали» по полу. Две капли, двигаясь в перпендикулярных направлениях, столкнулись и слились в одну каплю. Скорость первой капли перед столкновением $v_1 = 8$ м/с, скорость второй $v_2 = 10$ м/с. Массы капелек считайте одинаковыми и равными $m = 80$ мг. На сколько нагреются ртутные капельки в результате такой встречи? Удельная теплоемкость ртути $c = 140$ Дж/(кг · К).

8. Определите силу тока, текущего через сопротивление R_1 в электрической схеме, изображенной на рисунке 3, если на схему

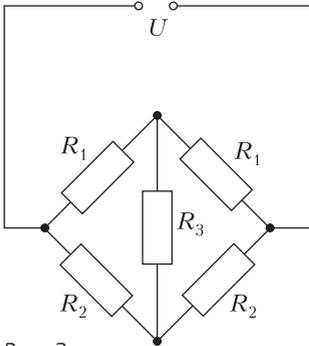


Рис. 3

подано напряжение $U = 30$ В. Известно, что $R_1 = 80$ Ом, $R_2 = 160$ Ом, $R_3 = 240$ Ом.

9. На рисунке 4 представлена блок-схема простейшего масс-спектрометра. Принцип работы данной установки можно описать следующим образом. В источнике ионов нейтральные атомы или молекулы ионизируются электронным ударом; получившиеся ионы ускоряются разностью потенциалов U и по-

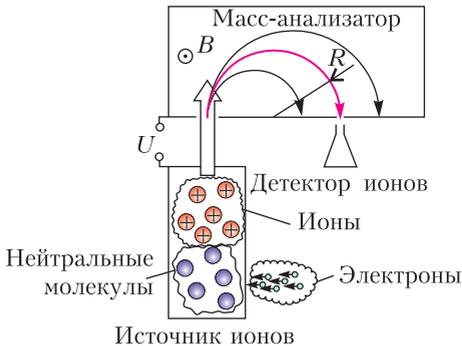


Рис. 4

падают в масс-анализатор; в масс-анализаторе ионы оказываются в области однородного магнитного поля \vec{B} , причем скорости частиц перпендикулярны линиям индукции магнитного поля; далее через узкую щель ионы попадают в детектор. Заряд ионов, которые попадали в детектор в магнитном поле $B_1 = 30$ мТл, равен $3e$, где $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Считая детектор неподвижным относительно масс-анализатора, найдите индукцию магнитного поля B_2 такую, чтобы в детектор попадали ионы той же массы, что и при магнитном поле B_1 , но с зарядом на единицу большим (в единицах элементарного заряда). Учтите при расчете, что скорость ионов на выходе из источника (до ускорения электрическим полем) пренебрежимо мала.

10. Снежная королева смотрит в круглое зеркальце, располагая его на уровне глаз на расстоянии $l_1 = 25$ см, и видит целиком круглую картину площадью S , висящую на стене у нее за спиной. Отодвинув зеркало на $l_2 = 62$ см от глаз, она смогла рассмотреть в 3 раза меньшую часть картины. На каком расстоянии от стены стоит Снежная королева?

Заключительный тур

1. Мальчик жонглирует 5 мячами, подбрасывая очередной пойманный мяч вверх со скоростью 5 м/с в момент, когда другой рукой ловит следующий. Чему равно расстояние между вторым и третьим мячами, когда мальчик подбрасывает пятый мяч? Промежутки времени между бросками одинаковые. (10 баллов)

2. Два пиратских корабля, находящихся на экваторе, поделив добычу, стали двигаться один строго на восток, а второй строго на запад с одинаковыми по модулю скоростями $v = 20$ км/ч относительно Земли. Каждому кораблю досталось ровно по 100 килограммов золота, причем взвешивание производилось на покоящихся относительно Земли кораблях. По прошествии некоторого времени взвешивание повторили уже на движущихся судах. Определите, на сколько показания весов будут отличаться на корабле, движущемся на запад, от показаний весов, движущихся с кораблем на восток. Считайте Землю шаром, продолжительность суток $T = 24$ ч, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². (25 баллов)

3. На тонкой нити подвешен шарик массой m . Нить приводят в горизонтальное положение и отпускают. Чему равна сила натяжения нити в тот момент, когда вектор ускорения шарика направлен горизонтально? (10 баллов)

4. Рита и Маруся сварили 2 литра клюквенного морса. До прихода гостей оставалось совсем немного времени, а морс все еще был теплым (40°C). Девочки хотели охладить его побыстрее с помощью 20 пластмассовых шариков со льдом (-20°C), но поспурили и разделили морс и шарики между собой поровну. Рита положила сразу все шарики в морс, а Маруся разлила морс в два одинаковых кувшина и положила шарики в один из них, подождала, помешивая морс, пока температуры шариков и морса сравняются, и переложил шарики во второй кувшин. Когда температуры снова сравнялись, Маруся слила морс в один большой кувшин. Чей морс оказался в итоге холоднее и на сколько градусов? Масса льда в шарике 20 г. Удельная теплоемкость воды (и морса) $4,2 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, удельная теплоемкость льда $2 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, удельная теплота плавления льда $340 \text{ кДж}/\text{кг}$. (15 баллов)

5. Определите КПД цикла (рис.5), проводимого с одноатомным идеальным газом,

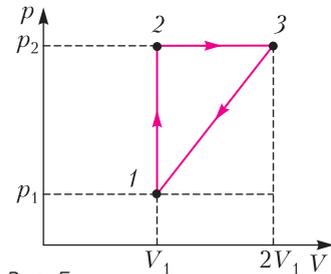


Рис. 5

если известно, что КПД цикла Карно, проводимого в том же диапазоне температур, равен 64%, а при изобарном расширении объем газа увеличивается в 2 раза. (25 баллов)

6. Катушка с числом витков $N = 100$ и диаметром $d = 1 \text{ см}$ помещена в однородное магнитное поле, параллельное ее оси. Индукция поля равномерно возрастает со скоростью B_0 . Концы катушки замкнуты на батарею из трех одинаковых конденсаторов, каждый из которых имеет емкость $C = 1 \text{ мкФ}$

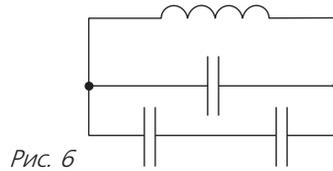


Рис. 6

(рис.6). Найдите скорость изменения индукции магнитного поля, если заряд батареи конденсаторов $Q = 10 \text{ нКл}$. (15 баллов)

ИНФОРМАТИКА

Отборочный тур

1. В таблице MS Excel (рис.7) содержатся данные о количестве двоек, троек, четверок

	A	B	C
1	Оценка	Практическая работа	Лабораторная работа
2		2	
3		3	
4		4	
5		5	4

Рис. 7

и пятерок за практическую и лабораторную работы (известно, что их выполняли одни и те же студенты). Часть значений в таблице была отформатирована белым по белому (так вышло...). На основе данных таблицы составлены две диаграммы (рис.8): левая по

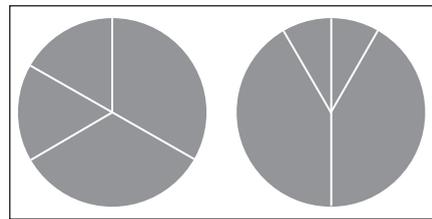


Рис. 8

диапазону B2:B5, правая – по C2:C5. Пользуясь диаграммами, отметьте истинные высказывания среди перечисленных ниже.

А. Получивших две пятерки не больше двух.

Б. Число выполнявших работы делится на 2, 3 и 4.

В. Наверняка есть хотя бы один студент с двойками по обеим работам.

Г. Средний балл за лабораторную работу выше, чем средний за практическую.

Д. Количество выполнявших работы не меньше 36.

Е. Процент качества (доля оценок 4 и 5 в общем количестве оценок) за лабораторную вдвое больше, чем за практическую.

Ж. Не менее 4 студентов получили оценки за практическую ниже, чем за лабораторную.

2. Найдите значение максимума рекурсивной функции QQ (рис.9) среди точек плос-

```

Цел QQ (Цел X, Цел Y, Цел C)
Нач
  Если Y=0 То
    QQ := C
  Иначе
    QQ := QQ(X, X mod Y, C+1)
КонецЕсли
Кон
  
```

Рис. 9

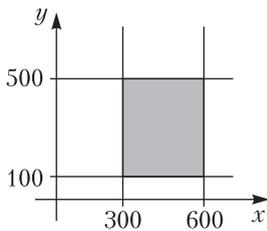


Рис. 10

кости с целочисленными координатами из области, показанной на рисунке 10 серым цветом (границы включаются). Третий параметр при первом вызове равен 0.

3. Пусть A и B – байты без знака, AND и OR – поразрядные логические операции. Известно, что $A \text{ AND } B = 137$, а $A \text{ OR } B = 207$. Сколько решений имеет эта система уравнений?

4. Ниже записаны 10 утверждений, имею-

щих отношение к вычислительной технике и информационным технологиям. Отметьте истинные.

А. Ричард Столлман, идеолог концепции свободного программного обеспечения, был автором идеи праздника «Притяжество», посвященного всемирному тяготению и отмечаемому ежегодно 25 октября.

Б. Среди 6-значных двоичных чисел палиндромами являются 4.

В. Для преобразования маленькой буквы латиницы в большую в коде ASCII достаточно прибавить к ее ASCII-коду 32.

Г. В экранных системах координат точка (100, 200) ниже и левее точки (200, 100).

Д. Автор «Паломничества Чайльд-Гарольда» приходится отцом автору первой в истории человечества программы для вычислительной машины.

Е. Знаменитый снимок «Безмятежность», ставший классическими обоями Windows XP, был сделан в окрестностях Палусских лугов.

Ж. Создателем хэштэгов является Джек Патрик Дорси.

З. Глагол – основанный на русском языке язык программирования – отличается динамической типизацией.

И. Первый троичный компьютер, сохранившийся до наших дней, был создан в 1840 году Томасом Фаулером.

К. Большинство японских клавиатур имеют около 2000 клавиш (по количеству используемых иероглифов).

5. У вас есть младший брат? Если нет – не страшно, представьте, что есть. И вот этот брат вернулся с курсов программирования на Small Basic (в дворовом подростковом

Требовалось вот это А вышло вот так

Текст программы >>>>>>

```

1 GraphicsWindow .Width =500
2 GraphicsWindow .Height =500
3 LineLen=200
4 X1=250
5 Y1=250
6 Alfa = Math.Pi
7 dA= Math.Pi*6/90-0.01
8 While LineLen >3
9   dy = Math .Sin(Alfa) * LineLen
10  dx = Math.Cos(Alfa) * LineLen
11  GraphicsWindow .DrawLine (X1, Y1, X1+dx, Y1+dy)
12  Alfa = Alfa - da
13  LineLen = LineLen - 5
14 EndWhile
  
```

Рис. 11

клубе) в слезах: он списал с доски программу, которая должна была рисовать одно, а вместо этого рисовала немного другое (рис.11). Что надо изменить в программе, чтобы она заработала, как надо?

- А. В строке 12 заменить минус на плюс.
- Б. В строке 7 убрать «-0.01».
- В. В строке 6 заменить Math.PI на Math/PI/2.
- Г. В строке 13 заменить 5 на 3.
- Д. Поменять местами синус и косинус.
- 6. См. рис.12. Ответ – число.



Рис. 12

Заключительный тур

1. Строки и рекурсия (8 баллов). Вот рекурсивная функция (рис.13).

```

Стр Замена (Стр S, Цел N)
Нач
    Если N=0 То
        Замена := S
    Иначе
        S := СЦЕПИТЬ(S, ПЕРЕВЕРНУТЬ(S))
        Замена := Замена (S, N-1)
Всё
Кон
    
```

Рис. 13

Здесь используются две встроенные функции: СЦЕПИТЬ объединяет две заданные в

качестве параметров строки в одну, ПЕРЕВЕРНУТЬ формирует зеркальное отражение переданной в качестве параметра строки (например, ПЕРЕВЕРНУТЬ(«БАР») вернет строку «РАБ»). Определите, какой по счету, начиная с единицы, в строке, полученной как Замена («ХУХZW», 10) будет предпоследняя буква Z?

2. Побитные сортировки (10 баллов). Профессор проводит спектральный анализ фотографий срезов яблок. Для кодирования полученных изображений он использует 3-битную RGB палитру. Напомним, что белый – это наличие всех цветов, черный – отсутствие, в желтом нет синего, в фиолетовом – зеленого, а в голубом – красного. Для оптимизации своей работы профессор с помощью специальной утилиты отсортировал двоичные представления цветов и записал в таблицу, пронумеровав их начиная с единицы, чтобы потом использовать именно номер цвета. Сортировка выполнялась по каждому биту, но неизвестно, в каком порядке они анализировались и по возрастанию или по убыванию выполнялась сортировка. Расчеты были произведены так, чтобы самый популярный в исследовании цвет был на первом месте. Но вот незадача: пока профессор собирал материал для исследования, таблица была утеряна. Однако профессор запомнил, что синий и черный были в разных половинах таблицы, а красный был под номером 5. Напишите двоичное представление цвета, который оказался самым популярным, в 3-битном формате RGB.

3. Расчетная таблица (15 баллов). Имеется представленная на рисунке 14 таблица. В ячейку A1 (она залита черным) ввели некоторое десятичное число. Все формулы протянули по горизонтали до столбца G. В результате в целевой ячейке H6 получилось 40. Какое наименьшее число могло быть в A1?

	=ЦЕЛОЕ(A1/3)						
	=ОСТАТ(A1;3)						
	=ЕСЛИ(B2<=1;1;0)						
	=ИСКПИЛИ(B3>0;B2>0)						
		1	=B5*2				
	=B5*B4						=СУММ(B6:G6)

Рис. 14

4. Нос Пиноккио (5 баллов). Известно, что когда идет снег, появляются подснежники. Также известно, что если Пиноккио сказал правду, то его нос вырастает. Верно ли утверждение, что нос Пиноккио не вырастет, если он скажет фразу «Снега нет, а подснежники появились»?

5. Блогеры (12 баллов). Дуся и Буся – блогеры. Они фотографируют все подряд и выкладывают в свои микроблоги. Матрицы их фотоаппаратов поддерживают 32768 цветов. Дуся любит выкладывать фотографии сразу и без обработки, скорость ее интернет-соединения 16 Кбайт/с. Буся любит использовать фильтр, но, для того чтобы выбрать и применить его, Бусе нужно 13 секунд. При использовании фильтра объем изображения увеличивается на 40%. Скорость соединения у Буси 256 КБит/с. Дуся и Буся сфотографировали двухметровый сугроб и одновременно приступили к процессу публикации фотографии. Известно, что сразу после загрузки изображения блогеры начинают получать «лайки». Фотографии Дуси получают по 3 лайка за секунду, а обработанные фотографии Буси – по 5 лайков за секунду. Известно, что в момент времени, когда лайков у фотографий Дуси и Буси было поровну, блогеры имели по 30 лайков. Найдите разрешение фотографий (количество пикселей по длине и по ширине), если все фотографии в микроблоге квадратные.

6. Яблокоед и стеллаж (10 баллов). Делфского яблокоеда (ДЯ) посадили в левую верхнюю ячейку бесконечного стеллажа-массива – будем считать, что это ячейка (0, 0), первое число – номер строки, второе – номер столбца, и велели выполнять алгоритм, описанный на рисунке 15. В момент старта в каждой ячейке массива лежит одно яблоко. Система команд, примененная в описании, включает классические команды алгоритмического языка и макрокоманды вида <натуральное число> * <направление>, по которым ДЯ заданное число раз выполняет перемещение на 1 ячейку в заданном направлении. Если в посе-

щенной ДЯ ячейке есть яблоко, ДЯ его съедает. Определите, сколько яблок съест ДЯ, прежде чем окажется в ячейке (3, 18).

7. Яблокоед и яблоки (15 баллов). Перед делфским яблокоедом (ДЯ) – ряд из яблок разного размера. ДЯ движется вдоль ряда-массива и ест яблоки, но не все – некоторые пропускает. По правилам движется ДЯ только вперед (по возрастанию номеров яблок). Первым он может съесть любое яблоко, но каждое следующее съеденное им яблоко должно быть больше предыдущего. Цель ДЯ – съесть как можно больше яблок. Вначале ДЯ не особо умничал и ел каждое яблоко, которое мог съесть. Затем он начал заранее просить предоставить ему массив с размерами яблок и пытался планировать свои действия. Результаты улучшились, но ДЯ все же подозревал, что при больших размерах ряда яблок он выбирает не оптимальный вариант. ДЯ погуглил и нашел идею алгоритма определения длины наибольшей возрастающей последовательности в массиве. Однако реализовал он ее, видимо, с ошибками...

1) Какое максимальное количество яблок сможет съесть ДЯ, если ряд состоит из яблок весом 5, 2, 7, 3, 9, 4, 11, 6, 1, 3, 13, 6, 8, 15, 10, 11, 7, 9, 10, 22, 11, 5, 13 единиц?

```

К := 1
НП
1*Вниз
К*Вправо
К*Вверх
1*Вправо
(К+1)*Вниз
(К+1)*Влево
К := К+2

```

КЦ

Рис. 15

```

Цел Алг ДлПосл(Цел Таб А[0..N])
Нач
Цел Таб Y[0..N]
Цел В, Е, М, D
D := 1
Y[0] := A[0]
НЦ Для К От 0 До N
В := 0
Е := D - 1
НЦ Пока В <= Е
М := (Е - В) div 2
Если А[К] > Y[М] То
В := М + 1
Иначе
Е := М - 1
Всё
КЦ
Если В = D То D := D + 1
Y[D] := A[K]
КЦ
ДлПосл := D
Кон

```

Рис. 16

2) Найдите ошибки (их количество неизвестно) в написанном ДЯ алгоритме (рис.16) и опишите, как их можно исправить.

8. Числа и биты (10 баллов). Задумано натуральное число из интервала от 16 до 31.

1) Какое число задумано, если известно, что высказывание «Восьмеричное представление числа является симметричным и в двоичном представлении числа единиц больше, чем нулей» содержит 4 бита информации о задуманном числе?

2) Какое из приведенных ниже высказываний о задуманном числе содержит ровно 2 бита информации о задуманном числе (разные высказывания могут соответствовать разным числам)?

А. Первая и последняя цифры в двоичном представлении числа совпадают.

Б. Число в двоичном представлении заканчивается тремя нулями.

В. В шестнадцатеричном представлении числа первая цифра не меньше второй.

Г. Восьмеричное представление числа состоит из двух нечетных цифр.

9. Пароль (8 баллов).

– Вот пароль к тесту!

– «НЕНЕЕ...»... чё?

– Да там все нормально, нумерация с нуля, алфавит без «ё»...

Найдите пароль к тесту, если в закодированном виде он выглядит так:

НЕНЕЕННЕНЕНЕНЕЕНЕЕЕНН

10. Генерация задач ЕГЭ (7 баллов). Вы – автор вариантов задач ЕГЭ по информатике и сейчас заняты генерацией вариантов 26-х задач про дерево игры. Игра такая: игроки поочередно называют буквы, выстраивая их последовательность так, чтобы в результате получилось одно из слов словаря игры. Побеждает тот, кто назовет последнюю букву слова. Например, если словарь игры состоит из слов КОФЕ, СОК, ЧАС и ЧЕПУХА, первый игрок может назвать букву К, С или Ч. Если он назвал К или С – у второго всего один вариант продолжения, а вот если Ч – у второго есть варианты А и Е (при первом он проиграет, а при втором выиграет). Словарь придуманной вами игры сейчас состоит из слов АВТОР, АРБА, АУТ, БОЛТ, ВЕС, ВОДА, ВОДКА.

1) У какого из игроков есть выигрышная стратегия?

2) Какое слово (существительное нарицательное на А, Б или В) надо добавить в словарь, чтобы выигрышная стратегия была у другого игрока?

Публикацию по математике подготовили

А.Боревич, И.Комарчев, А.Моисеев,

С.Преображенский;

по физике – Т.Андреева, Т.Воробьева,

М.Крупина, В.Кузьмичёв,

С.Старовойтов;

по информатике – С.Костоусов,

Е.Крылова, А.Хахина

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №9)

1. Нет.

Предположим, что может. Рассмотрим шахматную раскраску квадрата, при которой угловые клетки черные. Тогда черные диагонали имеют нечетную длину, а белые – четную. Две закрашенные диагонали имеют общую клетку, поэтому должны состоять из клеток одного цвета, значит, они не могут иметь длины 20 и 19.

2. Преобразуем: $ГУРУ + НОРА + РАГУ + РУНО = 100ГУ + РУ + 100НО + РА + 100РА + ГУ + 100РУ + НО = (ГУ + РУ + РА +$

$+ НО) \cdot 101$. Так как в скобках стоит натуральное число, то заданная сумма делится на 101.

3. 0,5.

Введем обозначения так, как показано на рисунке 1, и проведем высоту AD к основанию BC

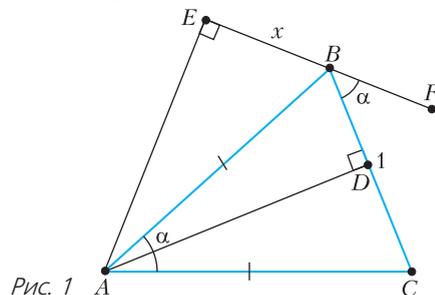


Рис. 1

14. Корпус мины, как железный сердечник, увеличивает индуктивность контура, и частота звуковых колебаний при этом уменьшается.

15. Таким способом можно остановить ракету и даже заставить ее лететь в обратном направлении.

16. Термоядерные реакции на Солнце идут с небольшой интенсивностью. На Земле подобные реакции безопасно осуществить пока не удается.

МИКРООПЫТ

Давление выдуваемого в трубочку воздуха разгоняет «снаряд» аналогично тому, как с древних времен стреляли дротиками из духовых ружей охотники и воины. А изучать с помощью такого снаряда можно движение тела, брошенного под углом к горизонту.

ЗАМКНУТЫЕ САМОПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ЛОМАНЫЕ

1. Нет.

Прямая делит плоскость на две полуплоскости. Будем двигаться по ломаной. При каждом пересечении звена ломаной с указанной прямой мы переходим из одной полуплоскости в другую. Но после обхода по всем звеньям мы вернемся в исходную точку, т.е. в ту же полуплоскость. Значит, прямая пересеклась с четным количеством звеньев, что противоречит условию.

2. Понятно, что у ломаной более трех звеньев. Пусть A, B, C и D – четыре последовательные вершины ломаной. Так как звенья AB и CD пересекаются, то A и D лежат по одну сторону от прямой BC . Пойдем по ломаной из вершины D дальше. На каждом шаге мы будем пересекать BC . Чтобы попасть в A , надо пройти четное количество звеньев. Учитывая три первых звена, получим, что в такой ломаной нечетное количество звеньев.

3. Нет.

Пусть такая ломаная существует. Подсчитаем количество пересечений. Оно равно $\frac{15 \cdot 3}{2}$, так как каждое пересечение учтено дважды. Но это число не целое. Противоречие.

4. Ответ показан на рисунке 3.

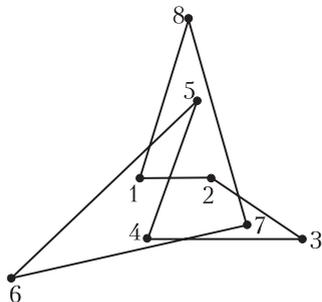


Рис. 3

5. Могла. Пример показан на рисунке 4.

6. 14.

Рассмотрим одно звено этой ломаной. На нем могут находиться не более четырех точек самопересечения, поскольку с соседними звеньями оно не может пересечься. Так как в каждой точке пересечения не менее двух звеньев, то точек самопересечения не больше чем $\frac{7 \cdot 4}{2} = 14$.

Пример семизвенной замкнутой ломаной, у которой 14 точек самопересечения, показан на рисунке 5.

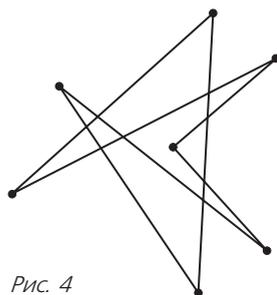


Рис. 4

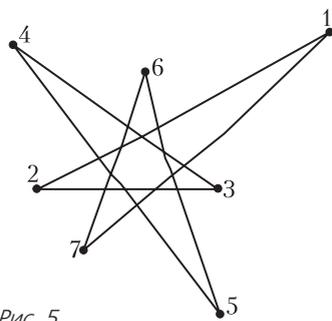


Рис. 5

Аналогичными рассуждениями можно показать, что наибольшее количество самопересечений у замкнутой ломаной с $2n + 1$ звеном равно $(2n + 1)(n - 1)$.

7. а) Пример шестизвенной замкнутой ломаной, у которой семь точек самопересечения, показан на рисунке 6.

б) Докажем, что такая ломаная не может иметь больше семи точек самопересечения. Пусть общее количество самопересечений равно N . Для каждого звена рассмотрим количество точек самопересечения, которые лежат на этом звене, и обозначим через S сумму этих чисел. Тогда $S \geq 2N$ (если в одной точке пересекаются два звена, то эта точка входит в сумму дважды, а если три или больше, то больше двух раз). На каждом звене может

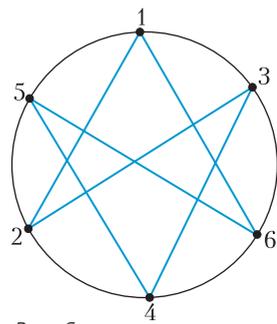


Рис. 6

лежать не больше трех точек самопересечения (см. решение задачи 6). При этом три точки могут быть только на «диагональном» звене: таком, что из четырех вершин, не являющихся его концами, две лежат в одной полуплоскости от него, а две – в другой. (Если по какую-то сторону от звена лежит лишь одна вершина, то нельзя провести больше двух отрезков к вершинам, лежащим по другую сторону звена.) Таких «диагональных» звеньев – не более трех. На каждом из остальных лежат не больше чем по две точки самопересечения, поэтому $S \leq 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 15$, т.е. $N \leq 0,5S \leq 7,5$. Так как N целое, то наибольшее значение N равно 7.

Аналогичными рассуждениями можно доказать, что и у любой замкнутой шестизвенной ломаной (не обязательно с вершинами на окружности) не больше семи точек самопересечения (на двух соседних звеньях не может быть по три точки самопересечения).

LX МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

1 (В.Кулишов). $f(x) = 0$ или $f(x) = 2x + m$, где m – целое.

Подставим $b = 0$. Получим, что

$$f(2a) + 2f(0) = f(f(a)).$$

Подставим $a = 0$ и $b = a$. Получим, что $f(0) + 2f(a) = f(f(a))$. Это означает, что $f(0) + 2f(a) = f(2a) + 2f(0)$, следовательно, $f(2a) = 2f(a) - f(0)$. Тогда изначальное условие примет следующий вид:

$$2f(a) + 2f(b) - f(0) = f(f(a+b)).$$

При фиксированной сумме $a + b$ фиксированы $f(f(a+b))$ и $f(0)$, тогда из этого следует, что фиксировано и $f(a) + f(b)$. В частности, для любого целого n выполнено $f(0) + f(n+1) = f(1) + f(n)$, откуда $f(n+1) - f(n) = f(1) - f(0)$. Тогда последовательность значений $\dots, f(-1), f(0), f(1), f(2), \dots$ образует бесконечную в обе стороны арифметическую прогрессию с разностью $k = f(1) - f(0)$. Значит, $f(x) = kx + m$ для некоторых целых k и $m = f(0)$.

Подстановка в исходное уравнение дает

$$\begin{aligned} f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k \cdot (2a) + m + 2 \cdot (kb + m) = f(f(a+b)) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2k(a+b) + 3m = f(f(a+b)). & \end{aligned}$$

Обозначим $a + b$ через s . Тогда

$$\begin{aligned} 2ks + 3m = f(f(s)) &\Leftrightarrow 2ks + 3m = \\ = k(ks + m) + m &\Leftrightarrow 2ks + 3m = (k^2)s + (k+1)m. \end{aligned}$$

Так как s – произвольное целое, то последнее

условие эквивалентно системе

$$\begin{cases} 2k = k^2, \\ 3m = (k+1)m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k(k-2) = 0, \\ m(k-2) = 0. \end{cases}$$

Отсюда $k = 0$ или 2, причем в первом случае $m = 0$, а во втором случае m – любое. Окончательно, $f(x) = 0$ или $f(x) = 2x + m$.

2 (Т.Ковалев). Введем такие обозначения: $PB_1 \cap AB = B_2$, $QA_1 \cap AB = A_2$, $PB \cap AQ = K$, $PB_1 \cap QA_1 = T$, $CK \cap AB = S$, $CK \cap PQ = L$ (рис.7).

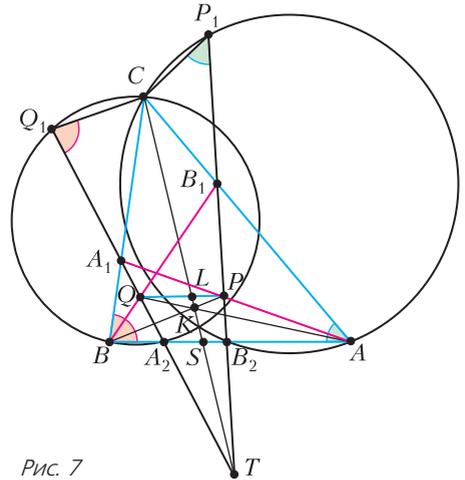


Рис. 7

Заметим, что точки C, K и T лежат на одной прямой (теорема Паппа для точек A_1, P, A и точек B_1, Q, B).

Лемма. Прямая CKT – радикальная ось окружностей (A_2BC) и (AB_2C) .

Доказательство. Заметим, что $SB_2/SA_2 = LP/LQ$ (гомотетия в точке T переводит точки A_2, S, B_2 в точки Q, L, P соответственно), также $LP/LQ = SB/SA$ (гомотетия в точке K переводит точки Q, L, P в точки A, S, B соответственно). Отсюда $SB_2 \cdot SA = SA_2 \cdot SB$, т.е. степени точки S относительно окружностей (A_2BC) и (AB_2C) равны. Мы видим, что на радикальной оси окружностей (A_2BC) и (AB_2C) лежат две точки прямой CKT – точки S и C , что доказывает лемму.

Заметим, что точки Q_1 и P_1 лежат на окружностях (A_2BC) и (AB_2C) соответственно, так как $\angle CP_1B_2 = \angle CAB_2$ и $\angle CQ_1A_2 = \angle CBA_2$.

Из леммы же вытекает, что степени точки T относительно окружностей (A_2BC) и (AB_2C) равны, значит,

$$TB_2 \cdot TP_1 = TA_2 \cdot TQ_1 \Rightarrow TP \cdot TP_1 = TQ \cdot TQ_1$$

($TQ/TA_2 = TP/TB_2$ из параллельности PQ и A_2B_2). Последнее равенство означает, что P, Q, P_1 и Q_1 лежат на одной окружности.

Замечание. Если $PB_1 \parallel QA_1$, то последний абзац решения не работает. Его можно заменить следующим рассуждением.

Из леммы следует, что вторая точка пересечения окружностей (A_2BC) и (AB_2C) , точка N , лежит на прямой $СКТ$, следовательно, CNB_2P_1 и CNA_2Q_1 – равнобокие трапеции, откуда $P_1B_2A_2Q_1$ – равнобокая трапеция. Так как $PQ \parallel A_2B_2$, то PQQ_1P_1 – равнобокая трапеция и, значит, точки P, Q, P_1 и Q_1 лежат на одной окружности.

3 (А.Львов). Рассмотрим граф $G = \{V, E\}$, в котором множество вершин V соответствует людям, а множество ребер E соответствует отношению дружбы. Во-первых, заметим, что G связан. Действительно, если бы вершины A и B находились в разных компонентах связности, то количество вершин $|V|$ было бы не меньше чем $\deg A + \deg B + 2 \geq 2020$ (здесь $\deg X$ обозначает степень вершины X). Теперь будем производить перестройки в произвольном порядке так, чтобы граф оставался связным. В некоторый момент мы не сможем больше сделать ни одной такой перестройки, так как каждый раз количество ребер $|E|$ уменьшается.

Докажем, что в итоге G стал деревом. Допустим, что это не так. Тогда в G будет цикл. Обозначим через S цикл из наибольшего количества вершин, пусть этот цикл проходит по вершинам $S_1S_2 \dots S_k$. Рассмотрим два случая: $k < 2019$ и $k = 2019$.

Случай 1 ($k < 2019$). Помимо S в G есть еще вершины, следовательно, из S выходит хотя бы одно ребро в остальные вершины, так как граф связан. Не умаляя общности, допустим, что есть ребро S_1A . Тогда ребра S_2A нет, иначе был бы цикл $S_1AS_2 \dots S_k$ большей длины, чем S . Значит, тройку $\{S_1, A, S_2\}$ можно перестроить. При этом связность сохранится, так как из S_1 будет путь $S_1S_kS_{k-1} \dots S_2A$, проходящий через A и S_2 . Противоречие.

Случай 2 ($k = 2019$). Все перестройки сохраняли четность степеней вершин, поэтому в G осталась хотя бы одна вершина нечетной степени. Не умаляя общности, будем считать, что $\deg S_1$ нечетна. Тогда есть «внутреннее» (т.е. не входящее в цикл S) ребро S_1S_i , где $2 < i < k$. Докажем тогда, что S_1 соединена со всеми остальными вершинами. Допустим, это не так. Тогда существуют две соседние вершины S_t и S_{t+1} , где $3 \leq t \leq k-2$ такие, что тройку $\{S_1, S_t, S_{t+1}\}$ можно перестроить. При этом связность графа сохранится, потому что из цикла S удалится только одно ребро. Противоречие. Значит, S_1 соединена со всеми вершинами. Тогда для вершин S_3, \dots, S_{k-1} также будут внутренние

ребра (они связаны с S_1). Аналогично показываем, что они соединены со всеми остальными вершинами. Значит, и S_2, S_k соединены со всеми остальными, так как из них идут внутренние ребра S_2S_{10} и S_kS_{10} . Итак, мы получили, что G – полный граф, но исходно он не был полным, а при каждой перестройке количество ребер уменьшалось. Противоречие.

В обоих случаях получено противоречие, следовательно, G стал деревом.

Для завершения решения достаточно доказать, что любое дерево можно перестройками привести к требуемому виду (когда все степени вершин не превосходят 1). Докажем это индукцией по количеству вершин n .

База $n = 1$ очевидна.

Переход: $n - 1 \rightarrow n$.

Пусть A – висячая вершина. Пусть G' – граф, получаемый из G отрезанием вершины A . Тогда G' тоже дерево, следовательно, по предположению индукции, G' можно привести к требуемому виду. Сделаем это, и вернем в рассмотрение вершину A . Если A окажется соединенной с вершиной степени 0, то получится граф нужного вида. Иначе, если A соединена с B , а в графе G' вершина B была соединена с C , то тройку $\{A, B, C\}$ можно перестроить. После этой перестройки получим граф требуемого вида. Переход индукции доказан, и задача решена.

4 (В.Петров). Для начала вынесем все двойки из правой части равенства:

$$\begin{aligned} (2^n - 1) \dots (2^n - 2^{n-1}) &= \\ &= 2^{1+2+\dots+(n-1)} \cdot (2^n - 1)(2^{n-1} - 1) \dots (2^1 - 1) = \\ &= 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot (2^n - 1)(2^{n-1} - 1) \dots (2^1 - 1). \end{aligned} \quad (1)$$

Согласно формуле Лежандра, для простого числа p и натурального k степень вхождения p в

произведение $k!$ равна $\sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{k}{p^i} \right]$. В случае $p = 2$ эта бесконечная сумма $\sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{k}{2^i} \right]$ строго меньше k

(так как если опустить целые части, то сумма будет равна k , но начиная с некоторого момента $k < 2^i$ и соответствующие слагаемые обращаются в 0).

С учетом (1) получаем оценку

$$k > \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow k \geq \frac{n(n-1)}{2} + 1. \quad (2)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} (2^n - 1)(2^{n-1} - 1) \dots (2^1 - 1) &\leq 2^n \cdot 2^{n-1} \dots 2^2 \cdot 1 = \\ &= 2^{n+(n-1)+\dots+2} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}-1}. \end{aligned}$$

А кроме того,

$$k! \geq 7! \cdot 8^{k-7} = 5040 \cdot 2^{3(k-7)} > 2^{12} \cdot 2^{3k-21} = 2^{3k-9}.$$

Подставляя два этих неравенства в (1), получаем: $2^{3k-9} < 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2}-1} = 2^{n^2-1}$. Тогда

$3k-9 < n^2-1$, т.е. $3k \leq n^2+7$. Домножив на 2 и применив (2), получаем: $3(n(n-1)+2) \leq 6k \leq 2n^2+14$, т.е. $n^2-3n \leq 8$, или $n(n-3) \leq 8$. Значит, $n < 5$.

Осталось проверить для $n=1, 2, 3, 4$, является ли число $(2^n-1) \dots (2^n-2^{n-1})$ факториалом.

$$n=1: 2^1-1=1!;$$

$$n=2: (2^2-1)(2^2-2)=3 \cdot 2=3!;$$

$$n=3: (2^3-1)(2^3-2)(2^3-4)=7 \cdot 6 \cdot 4$$

– не факториал, так как делится на 7, но не делится на 5;

$$n=4: (2^4-1)(2^4-2)(2^4-8)=$$

$$= 15 \cdot 14 \cdot 12 \cdot 8 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7,$$

что больше, чем $7! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, но меньше, чем $8! = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

5 (И.Гайдай-Турлов). б) $\frac{n(n+1)}{4}$.

Из предложенного решения задачи б) сразу следует утверждение а).

Последовательности букв T и H будем называть *словами*. Длину (количество букв) слова w обозначаем $|w|$, а количество букв $H-|w|_h$; i -ю букву слова w обозначаем $w[i]$.

Результат приписывания справа к слову v слова w будем обозначать vw . В частности, $\underbrace{ww \dots w}_n$ для краткости обозначим w^n .

Результат применения операции, данной в условии задачи, к слову w обозначим $f(w)$. По определению операции, если $w \neq T^n$, то w и $f(w)$ различаются только в букве номер $|w|_h$: $w[i] = f(w)[i]$ при $i \neq |w|_h$.

Также для слова w пусть \bar{w} – слово, полученное из w заменой каждой буквы на противоположную и далее изменением порядка букв на обратный (в частности, $\bar{\bar{H}} = T$ и $\bar{\bar{T}} = H$). Из определения ясно, что если $|w| = n$, то $\bar{w}[i] = w[n+1-i]$. Очевидно, $\overline{\overline{w}} = w$.

Зафиксируем еще несколько свойств.

1) $f(wT) = f(w)T$. Это верно, поскольку $|wT|_h = |w|_h$. Отсюда сразу вытекает, что

$$L(wT) = L(w).$$

2) $f(H^n) = H^{n-1}T$, $f(H^{n-1}T) = H^{n-2}T^2$ и т.д., в

частности,

$$L(H^n) = n.$$

3) Пусть $n = |w|$, пусть $w \neq H^n$. Тогда $f(\bar{w}H) = Tf(\bar{w})$.

Действительно, $|wH|_h = |w|_h + 1$, а $|\bar{w}|_h = |T\bar{w}|_h = n + 1 - |w|_h$.

Поэтому, если $i \neq n + 1 - |w|_h$, то

$$\overline{f(wH)[i]} = \overline{f(wH)[n+2-i]} = \overline{(wH)[n+2-i]} =$$

$$= \overline{(wH)[i]} = (T\bar{w})[i] = (Tf(\bar{w}))[i].$$

Если же $i = n + 1 - |w|_h$, то

$$\overline{f(wH)[i]} = \overline{f(wH)[n+2-i]} = \overline{(wH)[n+2-i]} =$$

$$= \overline{(wH)[i]} = \overline{(T\bar{w})[i]} = (Tf(\bar{w}))[i].$$

Итак, мы показали, что если $w \neq H^n$, то $f(wH) = Tf(\bar{w}) = f(\bar{w})H$ или $f(wH) = vH$, где $f(\bar{w}) = \bar{v}$. Значит, из слова wH получится H^{n+1} за столько же операций, за сколько из \bar{w} получится T^n , т.е. $L(wH) - L(H^{n+1}) = L(\bar{w})$, или

$$L(wH) = L(\bar{w}) + n + 1.$$

Теперь проведем подсчет.

Пусть $S_n = \sum_{|w|=n} L(w)$. Тогда

$$S_{n+1} = \sum_{|v|=n+1} L(v) = \sum_{|w|=n} (L(wH) + L(wT)) =$$

$$= \sum_{|w|=n} (L(w) + L(\bar{w}) + n + 1) = 2S_n + 2^n(n+1).$$

Здесь мы использовали то, что \bar{w} пробегает все слова длины n , поскольку операция $w \mapsto \bar{w}$ является взаимно-однозначным соответствием на множестве всех 2^n слов длины n .

Итак, $\frac{S_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{S_n}{2^n} + \frac{n+1}{2}$, $\frac{S_1}{2} = \frac{1}{2}$, отсюда получим ответ на пункт б):

$$\frac{S_n}{2^n} = \frac{S_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{n}{2} = \frac{S_{n-2}}{2^{n-2}} + \frac{n-1}{2} + \frac{n}{2} = \dots =$$

$$= \frac{1}{2} + \dots + \frac{n-1}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{4}.$$

6 (О.Смирнов). Обозначим через ω_B и ω_C окружности (BFP) и (CEP), а через Γ_B и Γ_C – окружности ($BFID$) и ($CEID$) соответственно (рис.8). Для каждой точки X на плоскости определим функцию $f(X)$:

$$f(X) = \deg_{\omega_B}(X) + \deg_{\Gamma_C}(X) - \deg_{\omega_C}(X) - \deg_{\Gamma_B}(X),$$

где через $\deg_{\Gamma}(X)$ обозначена степень точки X относительно окружности Γ . Если в декартовых

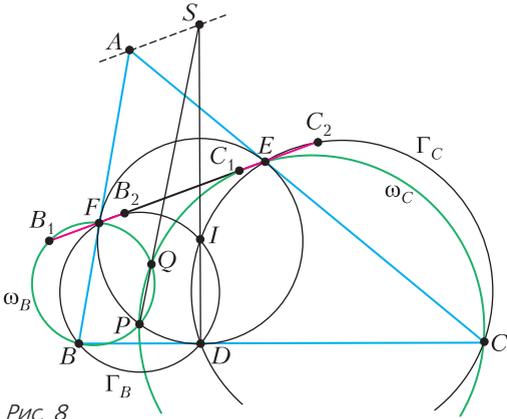


Рис. 8

координатах Γ задается уравнением $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, то $\deg_{\Gamma}(X) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2$, таким образом, $\deg_{\Gamma}(X)$ имеет вид $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma$. Отсюда ясно, что $f(X)$ линейна, т.е. имеет вид $f(X) = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1$. Пусть $S = PQ \cap DI$. Заметим, что AB – радикальная ось ω_B и Γ_B , а AC – радикальная ось ω_C и Γ_C , поэтому $f(A) = 0$. Далее, PQ – радикальная ось ω_B и ω_C , а DI – радикальная ось Γ_B и Γ_C , поэтому $f(S) = 0$. Отметим, что f – не тождественный 0 (например, $f(X) \neq 0$, если $X \in AC$ и $X \notin BC$), поэтому ГМТ точек X , для которых $f(X) = 0$, является прямой, и в силу $f(A) = f(S) = 0$ это прямая AS . ГМТ точек X , для которых $f(X) = \text{const}$, – это прямая, параллельная AS . Для решения задачи нам требуется доказать, что $AS \perp AI \Leftrightarrow AS \parallel EF \Leftrightarrow f(E) = f(F)$. Итак, далее будем доказывать, что $f(E) = f(F)$.

Обозначим через B_1, B_2, C_1 и C_2 вторые точки пересечения прямой EF с окружностями $\omega_B, \Gamma_B, \omega_C$ и Γ_C соответственно. Заметим, что $f(E) = \deg_{\omega_B}(E) - \deg_{\Gamma_B}(E) = \overline{EF} \cdot (\overline{EB_1} - \overline{EB_2}) = \overline{EF} \cdot \overline{B_2B_1}$ и, аналогично, $f(F) = \overline{FE} \cdot \overline{C_1C_2}$. Таким образом, задача сводится к проверке равенства $\overline{B_1B_2} = \overline{C_1C_2}$. Оказывается, что верно более сильное утверждение: точки B_1 и C_2 , а также B_2 и C_1 симметричны относительно середины M отрезка EF . Остается доказать, что B_1 и C_2 симметричны относительно M (второе доказывается аналогично).

Пусть D' – точка на ω , диаметрально противоположная D (рис.9), так что $PR \perp RD' \parallel EF$. Дуги FR и ED' равны, откуда $\angle FPA = \angle EPD'$.

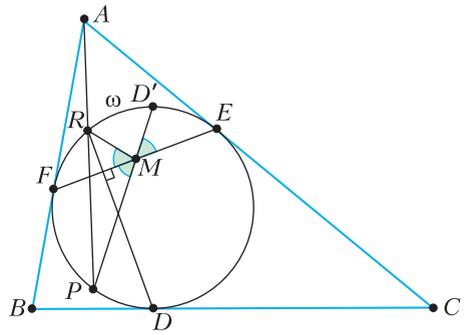


Рис. 9

Но PA – симедиана треугольника PEF , значит, PD' – медиана. Получаем, что P, M и D' лежат на одной прямой.

Так как C_2, I, C, E лежат на одной окружности (см. рис.8), то $\angle C_2IC = \angle FEA = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$. А поскольку $\angle BIC = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$, получаем, что C_2 лежит на BI . Окружность Γ_C построена на CI как на диаметре, поэтому $\angle IC_2C = 90^\circ$, иначе говоря, C_2 – проекция C на BI .

Пусть $T = BI \cap D'P$ (рис.10). Поскольку

$$\angle ABI = \frac{\angle A}{2} = \angle FDI = \angle FDD' = \angle AFD',$$

имеем $FD' \parallel BI$. Кроме того, $\angle FBT = \angle FDD' = \angle EPT$, поэтому $T \in \omega_B$. Далее, используя окружности ω_B и ω , получаем: $\angle D'TB_1 = \angle EFP =$

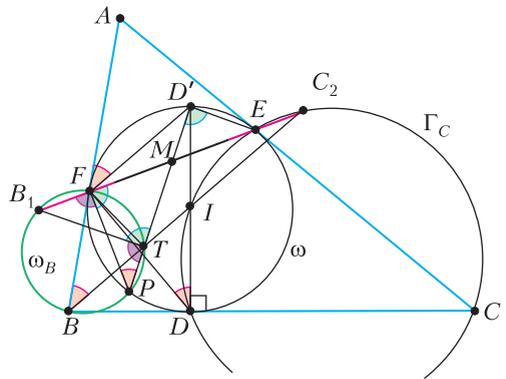


Рис. 10

$= \angle ED'P$, откуда $D'E \parallel TB_1$. А так как $D'F \parallel TC_2$, то треугольники $ED'F$ и B_1TC_2 подобны. А так как прямые $D'M$ и TM в них соответственные и M – середина EF , то M – середина B_1C_2 . Задача решена.

I МЕЖДУНАРОДНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Теоретический тур

Задача 1

$$A1. \Delta y = \max \left\{ \frac{F}{kL_0} \Delta l, \Delta l \right\}.$$

$$A2. \Delta W = \frac{kL_0}{2\Delta l} (\Delta y^2 - \Delta l^2).$$

$$A3. H = \frac{L_0}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right).$$

$$B1. t_c = \sqrt{\frac{L_0}{3g\alpha}} (1-\alpha)^3, \quad t_c = 0,245 \text{ с.}$$

$$B2. A = \frac{2g}{3\alpha}, \quad B = \left(\frac{1}{3\alpha} - 1 \right) gL_0.$$

$$B3. v_{\min} = (1-\alpha) \sqrt{A\alpha L_0 + B}.$$

$$C1. Q = MgL_0 \frac{(1-\alpha)^2 (2\alpha+1)}{6\alpha}.$$

Задача 2

$$A1. f_1 = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{d}{0,6\pi\mu_0\epsilon_0 l}} = 2,0 \cdot 10^9 \text{ Гц.}$$

A2. См. рис.11, где зеленая линия относится к случаю 1), красная – к случаю 2).

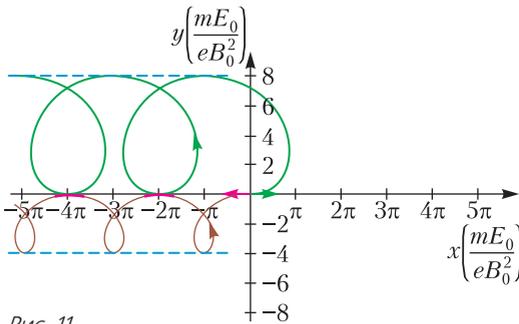


Рис. 11

$$A3. r = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{e}} = 3,18 \cdot 10^{-4} \text{ м} \approx 0,3 \text{ мм} \quad (\text{здесь } U = 800 \text{ В}).$$

A4. Точки A и B дрейфуют в сторону катода, точки C, D и E – в сторону анода (см. рис.12).

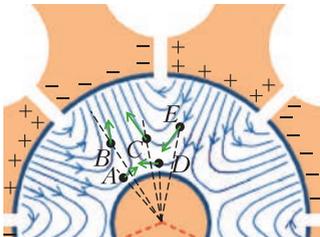


Рис. 12

A5. У пар AB, BC и CA угол уменьшается, у пар DE, EF и DF – увеличивается.

A6. См. рис.13; $\omega = \frac{\pi}{2} f = 3,85 \cdot 10^9 \text{ рад/с.}$

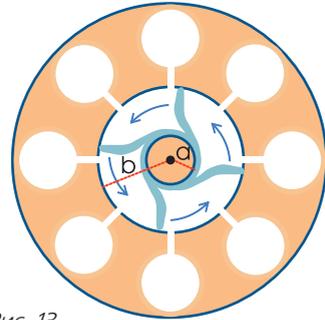


Рис. 13

$$A7. U_0 = \frac{\pi f B_0 (b^2 - a^2)}{4}.$$

$$B1. \tau(t) = -p_0 \sin \theta(t) \cdot E(t);$$

$$H_i(t) = E(t) \frac{dp_x(t)}{dt}.$$

$$B2. \langle H(t) \rangle = 0,5 E_0^2 \beta \epsilon_0 \omega \sin \delta.$$

$$B3. I(z) = I(0) \exp \left(- \frac{z \beta \omega \sin \delta}{c \sqrt{\epsilon_r}} \right).$$

$$B4. \beta = \epsilon_r.$$

B5. 1) $z_{1/2} = c \sqrt{\epsilon_r} \ln 2 / (\omega \epsilon_l) \approx 12 \text{ мм}$ (здесь $\epsilon_r \approx 78$, $\epsilon_l \approx 10$).

2) Увеличивается.

3) Уменьшается.

Задача 3

$$A1. \lambda_{\max} = 2L.$$

$$A2. V_1(x) = akV_0 \cos kx.$$

$$A3. p_1(x) = a \frac{\omega^2}{k} \rho_0 \cos kx.$$

$$A4. c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}.$$

$$A5. T_1(x) = ak(\gamma - 1)T_0 \cos kx.$$

A6. Температура в точке B будет понижаться, а в точках A и C – повышаться.

$$B1. T_{\text{сн}} = \frac{a\tau}{l\sqrt{2}}.$$

$$B2. \tau_{\text{кр}} = kl(\gamma - 1)T_0.$$

$$B3. \frac{dQ}{dt} \approx \frac{1}{\gamma - 1} V_0 \frac{dp}{dt} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p_0 \frac{dV}{dt}.$$

$$B4. V_a = \left(-\frac{1}{\gamma} p_a - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\beta}{\omega l \sqrt{2}} (\tau - \tau_{\text{кр}}) \right) \frac{V_0}{\rho_0},$$

$$V_b = \frac{1}{\gamma} p_b \frac{V_0}{\rho_0}.$$

В5. $W_{\text{пол}} = \frac{\pi}{2\omega}(\gamma - 1)\beta(\tau - \tau_{\text{кр}})ka^2S.$

В6. $Q_{\text{пол}} = \frac{\pi}{2\omega}\beta(\tau - \tau_{\text{кр}})\frac{a^2S}{l}.$

В7. $\eta = \frac{\tau_{\text{кр}}}{\tau}\eta_{\text{К}}.$

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ОЛИМПИАДА «ФИЗТЕХ»**

МАТЕМАТИКА

(Начало см. в предыдущем номере)

Избранные задачи для 10 класса

1. $x \in \left[-7; -\frac{8}{3}\right) \cup (0; 2).$

Обе функции определены при $21 - x^2 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow -7 \leq x \leq 3$. Заметим, что следующие два утверждения равносильны: «меньшее из двух чисел больше A » и «оба числа больше A ». Поэтому данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > \frac{x+4}{2}, \\ g(x) > \frac{x+4}{2}. \end{cases}$$

Поскольку функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны на области определения, оба неравенства системы выполняются при $\frac{x+4}{2} < 0$, т.е. при $x < -4$, а с учетом ОДЗ – при $x \in [-7; -4)$. Если $x \geq -4$, то у обоих неравенств левые и правые части неотрицательны и их возведение в квадрат является равносильным преобразованием. Получаем систему

$$\begin{cases} 21 - x^2 - 4x > \frac{x^2 + 8x + 16}{4}, \\ x^2 + 4x + 4 > \frac{x^2 + 8x + 16}{4}, \end{cases}$$

откуда следует $x \in \left(-\frac{34}{5}; -\frac{8}{3}\right) \cup (0; 2)$.

Учитывая рассматриваемый промежуток $x \in [-4; +\infty)$ и объединяя результаты, окончательно находим, что $x \in \left[-7; -\frac{8}{3}\right) \cup (0; 2)$.

2. $b_1 = \pm 3, q = \frac{1}{4}.$

Известно, что сумма первых n членов геометрической прогрессии с первым членом b_1 и знаменателем q равна $\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$. Для бесконечно убывающей геометрической прогрессии $|q| < 1$, по-

этому при n , стремящемся к бесконечности, q^n стремится к нулю, а сумма членов стремится к $\frac{b_1}{1-q}$.

Кубы членов данной прогрессии $\{b_n\}$ также образуют геометрическую прогрессию с первым членом b_1^3 и знаменателем q^3 , четвертые степени членов – прогрессию с первым членом b_1^4 и знаменателем q^4 , а квадраты – прогрессию с первым членом b_1^2 и знаменателем q^2 . Суммы членов этих прогрессий равны соответственно $\frac{b_1^3}{1-q^3}$, $\frac{b_1^4}{1-q^4}$ и $\frac{b_1^2}{1-q^2}$.

Из условия получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{b_1^3}{1-q^3} : \frac{b_1}{1-q} = \frac{48}{7}, \\ \frac{b_1^4}{1-q^4} : \frac{b_1^2}{1-q^2} = \frac{144}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b_1^2}{1+q+q^2} = \frac{48}{7}, \\ \frac{b_1^2}{1+q^2} = \frac{144}{17}. \end{cases}$$

Решая ее, находим $q = \frac{1}{4}$ и $b_1 = \pm 3$.

3. $R = 6, S_{ABCD} = 96 + 24\sqrt{7}.$

Обозначим точки касания окружности со сторонами AB и AD трапеции через K и W соответственно (рис.14). По теореме о касательной и

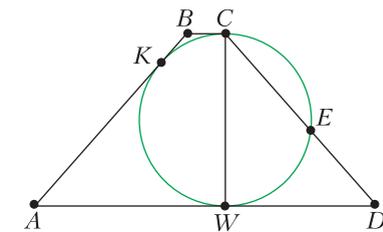


Рис. 14

секущей, $DW^2 = DE \cdot DC = 7 \cdot 16$, $DW = 4\sqrt{7}$. Так как C и W – точки касания окружности с параллельными прямыми BC и AD , отрезок CW есть диаметр окружности, перпендикулярный этим прямым. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника CDW находим, что $CW = \sqrt{16^2 - (4\sqrt{7})^2} = 12$. Следовательно, радиус R окружности равен $\frac{1}{2}CW = 6$.

Пусть $BC = x$. Тогда $BK = x$ (касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны), а в силу того, что трапеция равнобедренная, $AK = AB - BK = CD - BK = 16 - x$. Значит, $AW = AK = 16 - x$. Отсюда получаем, что сумма оснований есть $BC + AD = x + (4\sqrt{7} + 16 - x) = 16 + 4\sqrt{7}$, и площадь трапеции равна $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (16 + 4\sqrt{7}) = 96 + 24\sqrt{7}$.

4. Множество M , состоящее из множеств M_1 , M_2 и M_3 , изображено на рисунке 15, его площадь равна 4.

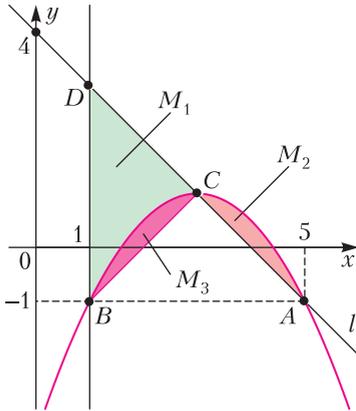


Рис. 15

5. $x \in (-\infty; -6) \cup [-4; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 4] \cup (6; +\infty)$. Рассмотрим знаменатель дроби. Его можно записать в виде

$$\begin{aligned} (x^2 - 4|x|)^2 - 8(x^2 - 4|x|) - 48 &= \\ &= (x^2 - 4|x| - 12)(x^2 - 4|x| + 4) = \\ &= (|x| - 6)(|x| + 2)(|x| - 2)^2. \end{aligned}$$

Исходное неравенство примет вид

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}} - \sqrt[3]{2|x|}}{(|x| - 6)(|x| + 2)(|x| - 2)^2} \geq 0. \quad (*)$$

В последнем неравенстве необходимо сравнить дробь с нулем, или, что то же самое, определить знак этой дроби. Если заменить числитель или любой из множителей в знаменателе выражением того же знака, то получим неравенство, равносильное исходному. Заметим, что знак выражения $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ совпадает со знаком выражения $a - b$ при любых a и b ; выражение $|a| - b$ при $b < 0$ положительно, а при $b > 0$ его знак совпадает со знаком выражения $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Это позволяет привести неравенство (*) к виду

$$\frac{x^2(x - 4)(x + 4)}{(x - 6)(x + 6)(x - 2)^2(x + 2)^2} \geq 0,$$

откуда получаем

$$x \in (-\infty; -6) \cup [-4; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 4] \cup (6; +\infty).$$

6. $\frac{1}{2}$ или $\frac{289}{338}$.

Проведем через центр окружности O прямую, перпендикулярную основаниям трапеции. Пусть

она пересекает AD и BC в точках N и M соответственно (рис.16, 17). Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам,

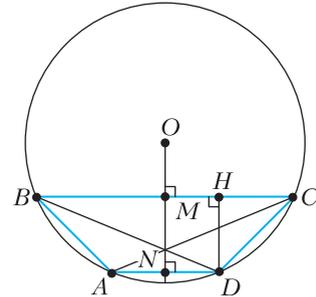


Рис. 16

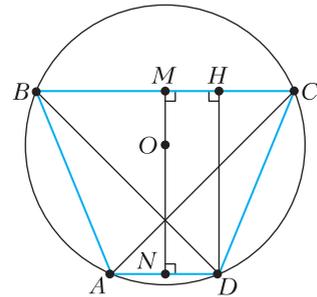


Рис. 17

$BM = MC = 12$, $AN = ND = 5$. По теореме Пифагора из треугольников OND и OMC находим

$$\begin{aligned} ON &= \sqrt{OD^2 - DN^2} = 12, \\ OM &= \sqrt{OC^2 - MC^2} = 5. \end{aligned}$$

Возможны два случая.

1) Точка O не лежит на отрезке MN (см. рис.16). Тогда высота трапеции есть $MN = ON - OM = 7$. Пусть H – основание перпендикуляра, опущенного из вершины D на основание BC . Так как трапеция, вписанная в окружность, равно-

бедренная, $BH = \frac{AD + BC}{2} = 17$. Тогда $BD =$

$$= \sqrt{DH^2 + BH^2} = \sqrt{338} = 13\sqrt{2}.$$

Площадь любого четырехугольника равна полупроизведению диагоналей, умноженному на синус угла между ними. В силу того, что диагонали прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ перпендикулярны диагоналям трапеции $ABCD$, угол между ними равен углу между диагоналями трапеции. Обозначим этот угол через ψ . Кроме того, диагонали прямоугольника, вписанного в окружность, являются ее диаметрами, поэтому $A_1C_1 = B_1D_1 = 26$. Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \psi = 169 \sin \psi,$$

$$S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1D_1 \sin \psi = 338 \sin \psi.$$

Значит, отношение площадей равно $\frac{169 \sin \psi}{338 \sin \psi} = \frac{1}{2}$.

2) Точка O лежит на отрезке MN (см. рис.17). Тогда $MN = ON + OM = 17$. Аналогично первому случаю, находим, что

$$BH = 17, \quad BD = \sqrt{DH^2 + BH^2} = 17\sqrt{2},$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \varphi = 289 \sin \varphi,$$

$$S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1D_1 \sin \varphi = 338 \sin \varphi,$$

где φ – угол между диагоналями трапеции. Отсюда отношение площадей есть $\frac{289 \sin \varphi}{338 \sin \varphi} = \frac{289}{338}$.

ФИЗИКА

9 класс

ВАРИАНТ 1

1. 1) При минимальном времени заплыва скорость пловца относительно воды перпендикулярна берегу, при этом $v = \frac{s}{\tau} = 2$ м/с.

2) $u = \frac{d}{\tau} = 1$ м/с.

3) Пусть \vec{v}_1 – скорость пловца относительно земли. Минимальный снос будет, если угол α между \vec{v} и \vec{v}_1 будет максимальный, т.е. $\vec{v}_1 \perp \vec{u}$ и $\sin \alpha = \frac{u}{v} = 0,5$, $\alpha = 30^\circ$. Из треугольника скоростей находим $T = \frac{d}{u \cos \alpha} \approx 115$ с.

2. 1) $\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{g}\tau$, $\vec{v}_0 \perp \vec{g}\tau$, из треугольника скоростей получаем $v_0 = \sqrt{v_1^2 - (g\tau)^2} = 12$ м/с.

2) $t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g \cos \alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$ с $\approx 0,7$ с.

3) $H = \frac{gt_1^2}{2} = 2,4$ м.

3. 1) $P_2 = P_1 + \rho g h S = 14$ Н.

2) Пусть $V_{\text{л}}$ – объем льда, $V_{\text{ш}}$ – объем шарика, тогда

$$V_{\text{л}} + V_{\text{ш}} = hS.$$

По закону Архимеда, $\rho g (V_{\text{л}} + V_{\text{ш}}) = \rho_{\text{л}} V_{\text{л}} + \rho_{\text{ш}} V_{\text{ш}}$. Отсюда находим

$$V_{\text{л}} = \frac{\rho_{\text{ш}}/\rho - 1}{\rho_{\text{ш}}/\rho_{\text{л}} - 1} \rho h S,$$

$$m_1 = \rho_{\text{л}} V_{\text{л}} = \frac{\rho_{\text{ш}}/\rho - 1}{\rho_{\text{ш}}/\rho_{\text{л}} - 1} \rho h S = 0,34 \text{ кг}.$$

3) После таяния льда показания весов не изменятся, так как общая масса содержимого остается прежней.

4. 1) Когда груз 2 опустился на H , грузы 1 и 3 поднялись на H . Скорости всех грузов одинаковы и равны v_1 . Согласно закону сохранения энергии,

$$3mgH = 2mgH + \frac{5mv_1^2}{2},$$

$$\text{откуда } v_1 = \sqrt{\frac{2}{5}gH} \approx 1,4 \text{ м/с}.$$

2) Пусть a – ускорение грузов, тогда $v_1 = \sqrt{2aH}$, и $a = \frac{g}{5}$. Для второго груза $3mg - T_2 = 3ma = 3m\frac{g}{5}$, и $T_2 = \frac{12}{5}mg = 2,4$ Н.

$$5. 1) P_1 = U^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1 + 2R_2} \right),$$

$$2P_1 = U^2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2 + 2R_1} \right),$$

отсюда получим для $x = \frac{R_2}{R_1}$ уравнение $2x^2 + 2x - 1 = 0$ и найдем

$$x = \frac{R_2}{R_1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \approx 0,37.$$

$$2) P_1 = \frac{U^2 \cdot 2(x+1)}{R_1(2x+1)}, \quad P_3 = \frac{U^2}{(R_1 + R_2)/2} = \frac{2U^2}{R_1(x+1)},$$

отсюда

$$P_3 = \frac{P_1(2x+1)}{(x+1)^2} \approx 0,93P \approx 93 \text{ Вт}.$$

ВАРИАНТ 2

1. 1) Пусть u_{\perp} – составляющая скорости лодки относительно воды, перпендикулярная берегу, u_{\parallel} – составляющая скорости лодки относительно воды, параллельная берегу. Тогда

$$u_{\perp} = \frac{d}{\tau}, \quad (u_{\parallel} + v)\tau = s, \quad \text{и } v = \frac{s}{\tau} - u_{\parallel} = \frac{s}{\tau} \sqrt{u^2 - u_{\perp}^2}.$$

Отсюда

$$v = \frac{s}{\tau} - \sqrt{u^2 - \left(\frac{d}{\tau}\right)^2} \approx 0,9 \text{ м/с},$$

$$v_1 = \sqrt{u^2 - v^2} \approx 0,94 \text{ м/с}.$$

2) $T = \frac{d}{v_1} \approx 213$ с.

2. 1) Ось x направим вдоль склона вниз, ось y направим перпендикулярно склону вверх. Тогда

$$a_x = g \sin \alpha, \quad a_y = -g \cos \alpha,$$

$$T = \frac{v_0}{|a_y|} = \frac{v_0}{g \cos \alpha} \approx 2,8 \text{ с}.$$

2) $v_1 = \sqrt{v_0^2 + (a_x \cdot 2T)^2} \approx 44,7$ м/с.

3) Третий раз мяч ударится о склон через время $6T$, и $s_3 = \frac{a_x (6T)^2}{2} \approx 1018$ м.

3. 1) Пусть M_C – масса Солнца, m – масса планеты. Тогда

$$m\omega^2 r = G \frac{M_C m}{r^2}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \frac{r^3}{T^2} = \text{const},$$

$$\frac{R_3}{R_B} = \sqrt[3]{\left(\frac{T_3}{T_B}\right)^2} \approx 1,38.$$

2) $\left(\frac{2\pi}{T_3} - \frac{2\pi}{T_B}\right)\tau = 2\pi$, и $\tau = \frac{T_3 T_B}{T_3 - T_B} \approx 1,6$ года.

4. 1) $h = \frac{\sin \alpha - \mu_2 \cos \alpha}{(\mu_1 - \mu_2) \cos \alpha} H$.

2) $v_{\max} = \sqrt{\frac{2gH(\sin \alpha - \mu_2 \cos \alpha)(\mu_1 \cos \alpha - \sin \alpha)}{(\mu_1 - \mu_2) \sin \alpha \cdot \cos \alpha}}$.

3) $T = \sqrt{\frac{2H(\mu_1 \cos \alpha - \sin \alpha)}{g(\sin \alpha - \mu_2 \cos \alpha)(\mu_1 - \mu_2) \sin \alpha \cdot \cos \alpha}}$.

5. 1) $P_1 = \frac{U^2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{6}{11} P$.

2) $P_2 = \frac{U^2}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3} = \frac{3}{2} P$.

10 класс

ВАРИАНТ 1

1. Время полета, одинаковое при выстреле вверх по склону и вниз, равно (рис.18)

$$t = \frac{2v_0 \sin \beta}{g \cos \alpha} = \frac{v_0 \cos \beta}{g \sin \alpha}, \quad \text{и} \quad \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\cos \alpha}{2 \sin \alpha}.$$

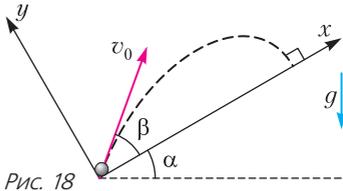


Рис. 18

При выстреле вверх по склону

$$s_1 = \frac{v_0^2 \cos^2 \beta}{2g \sin \alpha}.$$

1) При выстреле вниз по склону

$$s_2 = \frac{3 v_0^2 \cos^2 \beta}{2 g \sin \alpha} = 3s_1 = 2100 \text{ м}.$$

2) При выстреле вдоль горизонтальной поверхности

$$L = \frac{2v_0^2 \sin \beta \cos \beta}{g} = 2s_1 \cos \alpha = \sqrt{3}s_1 \approx 1212 \text{ м}.$$

2. По закону сохранения энергии для шайбы,

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh, \quad \text{где} \quad h = R(1 - \cos \alpha),$$

$$a_{\text{ц}} = \frac{v^2}{R} = 2g \cos \alpha.$$

1) $|P| = |N| = m(a_{\text{ц}} + g \cos \alpha) = 3mg \cos \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2} mg \approx 2,6mg$.

2) Чаша начнет скользить при $P \sin \alpha = \mu(3mg + P \cos \alpha)$, откуда

$$\mu = \frac{P \sin \alpha}{3mg + P \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{7} \approx 0,25.$$

3. 1) После соударения $v_1 = v_0 \sin \alpha = \frac{v_0}{2}$. Отсюда $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30^\circ$, $d = R$.

2) В результате соударения шайбы разлетаются под прямым углом и

$$T = \frac{\sqrt{s^2 - R^2} - \sqrt{3}R}{v_0}.$$

4. 1) Условия равновесия поршня: $p_1 S + F_{\text{тр}} = p_0 S$ и $p_2 S = p_0 S + F_{\text{тр}}$, откуда $p_1 + p_2 = 2p_0$. Далее,

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_2 V_2}{T_0}, \quad \text{и} \quad p_2 = p_0 \frac{V_0}{V_2},$$

$$\frac{p_1}{p_0} = 2 - \frac{V_0}{V_2}, \quad \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_0 V_0}{T_0}, \quad \text{и} \quad T_1 = T_0 \frac{p_1 V_1}{p_0 V_0} =$$

$$= T_0 \left(2 \frac{h}{L} - \frac{h}{H} \right) = 219 \frac{3}{23} \text{ К} \approx 219 \text{ К}.$$

2) $F_{\text{тр}} = S(p_2 - p_0) = p_0 S \left(\frac{L - H}{H} \right) = \frac{20}{23} \text{ кН} \approx 870 \text{ Н}.$

3) $Q = \Delta U = 5hSp_0 \left(\frac{L}{H} - 1 \right) = \frac{40}{23} \text{ кДж} \approx 1,7 \text{ кДж}.$

5. Внутренняя энергия смеси газов не изменяется.

1) $U = \frac{5}{2} RvT_1 + \frac{5}{2} R \cdot 1,5v \cdot \frac{5}{4} T_1 = \frac{115}{16} vRT_1,$

$$U = 2,5v \cdot \frac{5}{2} RT_2, \quad T_2 = \frac{23}{20} T_1 = 1,15T_1.$$

2) $p = \frac{2,5vRT_2}{V} = \frac{23}{8} \frac{vRT_1}{V} = 2,875 \frac{vRT_1}{V}.$

ВАРИАНТ 2

1. 1) $\tau = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = 0,9 \text{ с}.$

2) $h = \frac{9}{121} \frac{v_0^2}{g} = 2,4 \text{ м}.$

3) Дальность полета второго мяча без стенки

$$l_2 = \frac{(v_0/2)^2 \sin 4\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 4\alpha}{4g} = \frac{\sqrt{3}}{8} \frac{v_0^2}{g}.$$

Искомое расстояние

$$L = l_2 - l = \left(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{11} \right) \frac{v_0^2}{g} = \frac{3\sqrt{3}}{88} \frac{v_0^2}{g} \approx 1,9 \text{ м}.$$

2. 1) В системе отсчета, где центр полого шара неподвижен, скорость жука $v' = \frac{v_1 + v_2}{2}$, поэтому $T = \frac{2\pi R}{v'} = \frac{4\pi R}{v_1 + v_2} \approx 0,63 \text{ с}$.

2) Запишем второй закон Ньютона в системе, где центр сферы неподвижен. Предположим, что сила реакции сферы в верхней точке направлена вниз. Тогда

$$N + mg = \frac{mv^2}{R}, \quad N = \frac{mv^2}{R} - mg < 0,$$

$$P = |N| = m \left(g - \frac{v^2}{R} \right) = 0,01 \text{ Н},$$

Жук действует на сферу с силой P , направленной вниз.

3. Пусть xy – неподвижная система отсчета. Ось y в момент удара проходит через центры обеих шайб (от 1-й ко 2-й), ось x проходит через точку касания шайб (влево вниз), α – угол между \vec{v} и осью y , $\sin \alpha = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30^\circ$. При абсолютно упругом ударе выполняются законы сохранения энергии и импульса. Отсюда получаем

$$v'_{2y} = v_{1y}, \quad v'_{1y} = v_{2y}, \quad v'_{2y} = v \cos \alpha,$$

$$v'_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = \sqrt{4v^2 \sin^2 \alpha + v^2 \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{7}}{2} v,$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v \cos \alpha}{2v \sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \beta \approx 1,76 \text{ рад} \approx 100,9^\circ.$$

4. 1) $M_{\text{II}} = \frac{M p_0 S H}{RT_1} = 1,4 \text{ г}$.

2) $(p_b + p_0)S = p_0 S + Mg$, и $p_b = 0,3 p_0$;

$p'_b S = p_0 S + Mg$, и $p'_b = 1,3 p_0$;

$\frac{p'_b}{p_b} \frac{h}{H} = \frac{T_2}{T_1}$, и $h = \frac{p_b}{p'_b} \frac{T_2}{T_1} H \approx 5,1 \text{ см}$.

5. $U_r + U_k = U'_r + U'_k, \quad v C_{Vr} \cdot T_1 + 2v C_{Vк} \cdot \frac{4}{5} T_1 =$

$= v C_{Vr} \cdot T_2 + 2v C_{Vк} \cdot T_2$, и $T_2 = \frac{11}{13} T_1$;

$p'_r = \frac{v R T_2}{V}, \quad p'_k = \frac{2v R T_2}{V}, \quad p = p'_r + p'_k = \frac{33 v R T_1}{13 V}$.

11 класс

ВАРИАНТ 1

1. 1) Согласно закону сохранения импульса, $mv_0 \cos \alpha = (M + m) \frac{v_0}{5}$, откуда получаем $\frac{m}{M} = \frac{1}{2}$.

2) В соответствии с законом сохранения энергии,

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} (M + m) \left(\frac{v_0}{5} \right)^2 + mgH, \quad \text{и} \quad H = \frac{11 v_0^2}{25 g}.$$

3) Направим ось x под углом α к горизонту

вверх. В лабораторной системе отсчета $a_x = -g \sin \alpha$, $\frac{v_0}{5} \cos \alpha = v_0 + (-g \sin \alpha) T$. Отсюда находим $T = \frac{11 v_0}{10 g}$.

2. 1) При T_1 пара нет и можно считать, что азот занимает весь объем. Поэтому

$$p_1 = \frac{v_2 R T_1}{V} \approx 0,3 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

2) В первом отсеке находится только вода массой 18 г, ее объем $V_1 = 18 \text{ см}^3$.

3) Предположим, что вся вода испарилась. Тогда

$$p_2 = \frac{(v_1 + v_2) R T_2}{V} \approx 0,62 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Это меньше давления насыщенного пара при T_2 , т.е. предположение верное.

3. 1) Сразу после замыкания ключа напряжение на катушке $U_0 = \mathcal{E}$.

2) Пусть U – напряжение на катушке, $N = UI$ – мощность в катушке, $\mathcal{E} = U + IR$. Отсюда $N = -\frac{U^2}{R} + U \frac{\mathcal{E}}{R}$. Максимальная скорость изменения энергии N_{max} достигается при $U = \frac{\mathcal{E}}{2}$ и равна $N_{\text{max}} = \frac{\mathcal{E}^2}{4R}$.

3) Поскольку $U = LI'$, $N = -\frac{U^2}{R} + U \frac{\mathcal{E}}{R}$, $N = \alpha N_{\text{max}} = \alpha \frac{\mathcal{E}^2}{4R}$, $\alpha = \frac{24}{49}$, то $I' = \frac{\mathcal{E}}{2L} (1 \pm \sqrt{1 - \alpha})$, $I'_1 = \frac{6 \mathcal{E}}{7 L}$, $I'_2 = \frac{1 \mathcal{E}}{7 L}$.

4. 1) Пусть $b = 2a$ – длина длинной стороны рамки. Направим ось x вдоль оси соленоида. В любой точке на торце соленоида $B_x(t) = \frac{1}{2} B_0 \cos \omega t$. Магнитный поток через площадь рамки $\Phi = B_x(t) ab = \frac{1}{2} B_0 ab \cos \omega t$.

ЭДС индукции $\mathcal{E} = -\Phi' = -\frac{1}{2} B_0 ab \omega \sin \omega t$. Ток $I = \frac{\mathcal{E}}{2(a+b)\rho} = -\frac{1}{4} \frac{B_0 ab \omega \sin \omega t}{(a+b)\rho}$. Максимальный

ток $I_0 = \frac{1}{4} \frac{B_0 \omega}{\rho} \frac{ab}{a+b} = \frac{1}{6} \frac{B_0 \omega a}{\rho}$.

2) Сила натяжения (сжатия) стороны b

$$F(t) = \frac{1}{2} B_x(t) I(t) a = -\frac{1}{32} \frac{B_0^2 \omega}{\rho} \frac{a^2 b}{a+b} \sin 2\omega t.$$

Максимальная сила натяжения

$$F_0 = \frac{1}{32} \frac{B_0^2 \omega}{\rho} \frac{a^2 b}{a+b} = \frac{1}{48} \frac{B_0^2 \omega a^2}{\rho}.$$

5. 1) Изображение S_1 в линзе получается на расстоянии 18 см от линзы, слева от нее; оно мнимое.

2) Изображение S_2 в зеркале находится на расстоянии 24 см от зеркала, справа от него; S_2 – источник для линзы, $d_2 = 30$ см, $f_2 = \frac{d_2 F}{d_2 - F} = -15$ см. Изображение S_3 в системе получается на расстоянии 15 см от линзы, справа от нее.

3) Скорость S_2 равна $2v$, отношение скоростей S_3 и S_2 равно $\frac{u}{2v} = \Gamma^2$, где $\Gamma = \frac{|f_2|}{d_2} = \frac{1}{2}$. Отсюда $u = \frac{1}{2}v = 3$ мм/с.

ВАРИАНТ 2

1. 1) Подъемная сила $F_{\text{п}} = mg$, сила тяги

$$F_{\text{т}} = F_{\text{сопр}}, \quad \frac{F_{\text{т}}}{mg} = \frac{1}{K} = \frac{1}{20}.$$

2) КПД $\eta = \frac{F_{\text{т}} L}{qm_{\text{т}}}$, $\frac{mg}{F_{\text{т}}} = K$, $\alpha = \frac{m_{\text{т}}}{m} = \frac{gL}{Kq\eta} = 0,05$.

2. 1) $\frac{T_2}{T_1} = \frac{2V_1}{V_1}$, $T_{\text{max}} = T_2 = 2T_1 = 200$ К.

2) $A_{12} = p_1(V_2 - V_1) = p_1 V_1 = \nu RT_1 \approx 831$ Дж.

3) $\eta = \frac{A_{12} - A_{31}}{\nu C_p(T_2 - T_1)} = \frac{2}{5} \left(1 - \frac{A_{31}}{\nu RT_1}\right) \approx 0,12$.

3. 1) $I_{\text{max}} = \frac{\mathcal{E}}{R}$.

2) Пусть U – напряжение на конденсаторе. Тогда $N = UI$, $\mathcal{E} = U + IR$, $N = -\frac{U^2}{R} + U \frac{\mathcal{E}}{R}$. Максимальная скорость изменения энергии N_{max} достигается при $U = \frac{\mathcal{E}}{2}$ и равна $N_{\text{max}} = \frac{\mathcal{E}^2}{4R}$.

3) $N = \alpha N_{\text{max}} = \alpha \frac{\mathcal{E}^2}{4R}$, $\alpha = \frac{5}{9}$, откуда

$$U = \frac{\mathcal{E}}{2} (1 \pm \sqrt{1 - \alpha}), \quad U_1 = \frac{5}{6}\mathcal{E}, \quad U_2 = \frac{1}{6}\mathcal{E}.$$

4. 1) Соответственно закону сохранения энергии, $\frac{1}{2}CU_0^2 = \frac{1}{2}C\left(\frac{U_0}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}LI_0^2$. Отсюда

$$I_0 = \sqrt{\frac{8CU_0^2}{9L}} = \frac{2}{3}U_0\sqrt{\frac{2C}{L}}.$$

2) $U_C = 0$.

3) Пусть I_1 – установившийся ток через катушки. Сумма магнитных потоков сохраняется:

$LI_0 = LI_1 + 2LI_1 + 3LI_1 + 4LI_1$, и $I_1 = \frac{1}{10}I_0$. По закону сохранения энергии,

$$Q = \frac{1}{2}CU_0^2 - \frac{1}{2}(L + 2L + 3L + 4L)I_1^2 = \\ = \frac{1}{2}CU_0^2 - 5LI_1^2 = \frac{1}{2}CU_0^2 - \frac{1}{20}LI_0^2 = \frac{41}{90}CU_0^2.$$

5. 1) Изображение S_1 в линзе получается на расстоянии $f_1 = 48$ см от линзы, справа от нее; оно действительное.

2) Изображение S_1 – мнимый предмет для зеркала. Изображение S_2 в зеркале действительное, находится слева от зеркала, на расстоянии 12 см от зеркала. Оно – источник для линзы, $d_2 = 24$ см, $f_2 = \frac{d_2 F}{d_2 - F} = 48$ см. Изображение S_3 в системе получается на расстоянии $f_2 = 48$ см от линзы, слева; оно действительное.

3) Скорость S_2 равна $2v$, $\frac{u}{2v} = \Gamma^2$, $\Gamma = \frac{f_2}{d_2} = 2$.

Скорость изображения в системе $u = 8v = 8$ мм/с.

КВАНТ 12+

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,
А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов,
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

**Журнал «Квант» зарегистрирован
в Комитете РФ по печати.**

Рег. св-во ПИ №ФС77-54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,
«Квант»**

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

**в соответствии с предоставленными
материалами
в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8»**

Телефон: +7 495 363-48-86,

http://capitalpress.ru

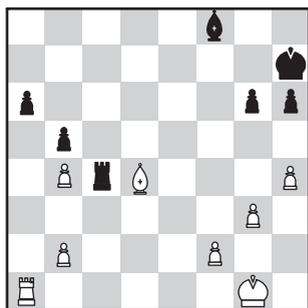
Кубок мира ФИДЕ 2019

В начале осени 2019 года в Ханты-Мансийске прошел очередной Кубок мира ФИДЕ – 128 участников играли по олимпийской системе. Довольно неожиданно победителем стал азербайджанский гроссмейстер Теймур Раджабов. В финале он обыграл рейтинг-фаворита турнира Дина Лижэня из Китая (Раджабов по рейтингу был только десятым).

Т.Раджабов – Дин Лижэнь

Финал, 3-я партия

1. e4 e5 2. ♘f3 ♗c6 3. ♖b5 a6 4. ♗a4 ♗f6 5. 0-0 ♗e7 6. ♚e1 b5 7. ♗b3 0-0 8. c3 d5 9. ed ♗d5 10. ♗e5 ♗e5 11. ♚e5 c6 12. d3 ♗d6 13. ♚e1 ♗f5 14. ♗f3 ♗h4 15. g3 ♗h3 16. ♗e3. В первой партии черные не имели проблем после 16. ♗d2, поэтому на этот раз Раджабов избирает другой путь. 16... ♗d3 17. ♗d2 ♗f5 18. ♗d4 ♗fd8 19. a4 h6 20. h4 ♗ac8 21. ♗f5 ♗f5 22. ♗e4 ♗f8. Первая неточность. К ничейной позиции ведет агрессивное 22...c5!, теперь же белые могут постепенно увеличивать перевес. 23. ♗c5 ♗b4 24. ♚e5 g6 25. ab! cb 26. ♗e6! ♗e6 27. ♚e6 fe 28. ♗e6+ ♗h7 29. ♗c8 ♗c8 30. cb ♗c4.



Серией точных ходов белые смогли добиться лишней пешки. 31. ♗f6! (к ничьей вело 31. ♗e5 ♗g7 32. ♗g7 ♗g7 33. ♚a6 ♗b4) 31... ♗g7 32. ♗e7 ♗c6 33.

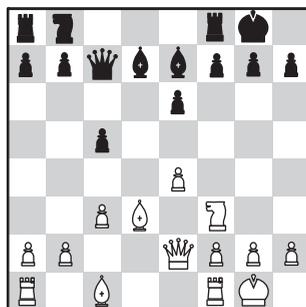
♚a2 ♗g8 34. ♗c5 ♗f7? Черные ведут короля в центр, но сильнее было бы 34... ♗f8! 35. ♗g2 ♗g7, прикрывая обе пешки. 35. ♗g2 ♗e6 36. b3 h5 37. ♗f3 ♗f5 38. ♚d2 ♗e5 39. ♚d5 ♗e6? Решающая ошибка. Намного упорнее 39... ♗f6! 40. ♗e4 ♗e6, затрудняя белым проведение плана с продвижением пешки f. 40. ♗e4 ♗f6 41. f4! ♗c3 42. f5+ ♗f7 43. ♚d7+ ♗g8 44. ♗d6 gf+ 45. ♗f5 ♗g7. (Последняя ловушка: 46. ♗g6?? ♗f8, и выигрывают уже черные.) 46. ♗g5, и черные сдались.

Полуфинальные и четвертьфинальные поединки Т.Раджабов провел ярче, одолев соперников в атакующем стиле.

Т.Раджабов – М.Вашье-Лаграв

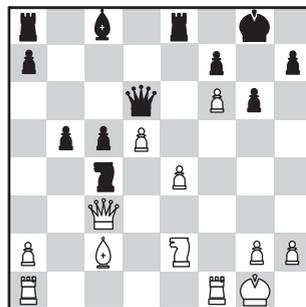
Полуфинал

1. ♗f3 ♗f6 2. c4 c5 3. ♗c3 d5 4. cd ♗d5 5. e3 ♗c3 6. dc ♗c7 7. e4 e6 8. ♗d3! Редкий случай дебютной новинки уже на восьмом ходу. 8... ♗e7 9. ♗e2 ♗d7 10. 0-0 0-0? Первая, но серьезная стратегическая ошибка. Черный король попадает под массивную атаку.



11. e5! ♗c6 12. ♗g5 h6 13. ♗h7+! ♗h8 14. ♗c2 c4 (грозило 15. ♗d3) 15. ♚e1 ♗d8 16. ♗h3 ♗d5 17. ♗f4 ♗c5 18. ♗b1! ♗g5! (грозило 19. ♗c2 с последующей жертвой коня на g6) 19. ♗e6 fe 20. ♗g5 ♗d5 21. ♗g4 ♗d7 22. ♗e4 ♗e5 23. ♗h5 ♗b5 24. ♗h6 ♗e4 25. ♗f4+ ♗g8 26. ♗e5 ♗d5 (возможно, белым было

бы сложнее реализовать преимущество в случае размена ферзей: 26... ♗e5 27. ♗e5 ♗d5) 27. ♚e2 ♗f5 28. ♗e3 ♗e8 29. f3 ♗g6 30. h4 ♗af8 31. ♗g5 a6 32. ♚d1 ♗e8 33. ♚d4 ♗c6 34. ♚g4 ♗h7 35. ♗f4 ♗8f7 36. ♗e5 b5 37. ♗f2 ♗d7 38. ♗g3 ♗h5 39. ♗d4 ♗c7 40. ♚e5 ♗hf5 41. ♚g5 ♗g8 42. h5 ♗g5 43. ♗g5 ♗e7 44. ♗g4 ♗f5?? Зовок в безнадежной позиции. Грозит 45. h6!, а в случае 44... ♗f8 белые форсируют переход в выигранный пешечный эндшпиль путем 45. ♚d5! ed 46. ♗c8+ ♗e8 47. ♗c5+ с разменом всех фигур. 45. ♗f5, и черные сдались.



Т.Раджабов – Д.Шонг
Четвертьфинал

Такая позиция возникла после 22 хода черных, и в последующих тактических осложнениях сильнее оказался более опытный соперник: 23. ♗d3! ♗e3 24. ♗b5 ♗e4 25. ♗g3 ♗g4. Ладьей отступить нельзя: 25... ♗e5 26. ♚fe1 ♗g4 27. ♗c6 ♗b8 28. ♚e5 ♗e5 29. ♚e1 с выигрышем коня. 26. ♚ac1 c4? (сильнее 27... ♗b7!, заканчивая развитие и избегая линейного мата в осложнениях) 27. h3 ♗b7 28. hg ♗g4 29. ♗c6! ♗g3 30. ♗c4 ♗a6 31. ♗f4! Ход опытного игрока – после 31. ♗a6 ♗h3 у черных есть шансы спастись с помощью вечного шаха. 31... ♗d8 32. ♗ce1 ♗c5+ 33. ♗f2 ♗c3 34. ♚e7 ♗c1+ 35. ♗h2 ♗c3 36. ♗h6, и мат на g7 неизбежен, черные сдались.

А. Русанов

Индекс 90964

ПОЧЕМУ ВЫЛЕТЕВШАЯ ИЗ РУЖЬЯ ПУЛЯ НЕ МОЖЕТ ОТВОРИТЬ ДВЕРЬ,
НО МОЖЕТ ВДРЕБЕЗГИ РАЗБИТЬ НАПОЛНЕННЫЙ ВОДОЙ СТАКАН?

КАТАПУЛЬТЫ, ПУШКИ,
МИНОИСКАТЕЛИ...



Уроки с физикой



(Подробнее – на с. 32 внутри журнала)